



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

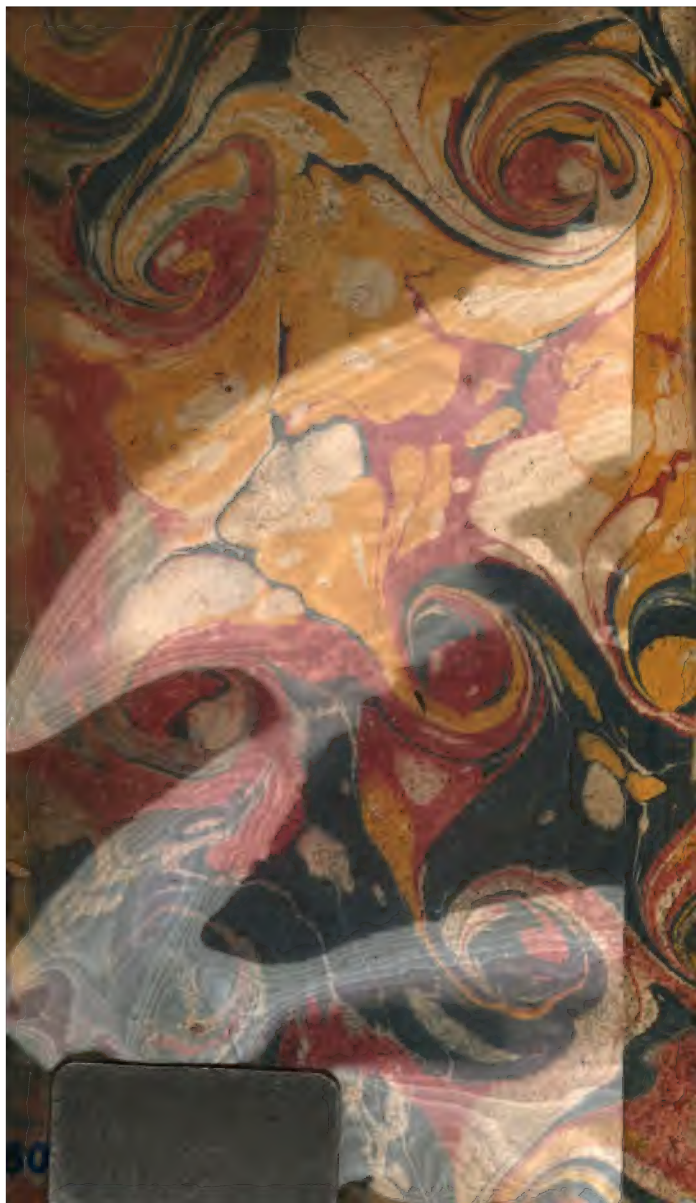
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

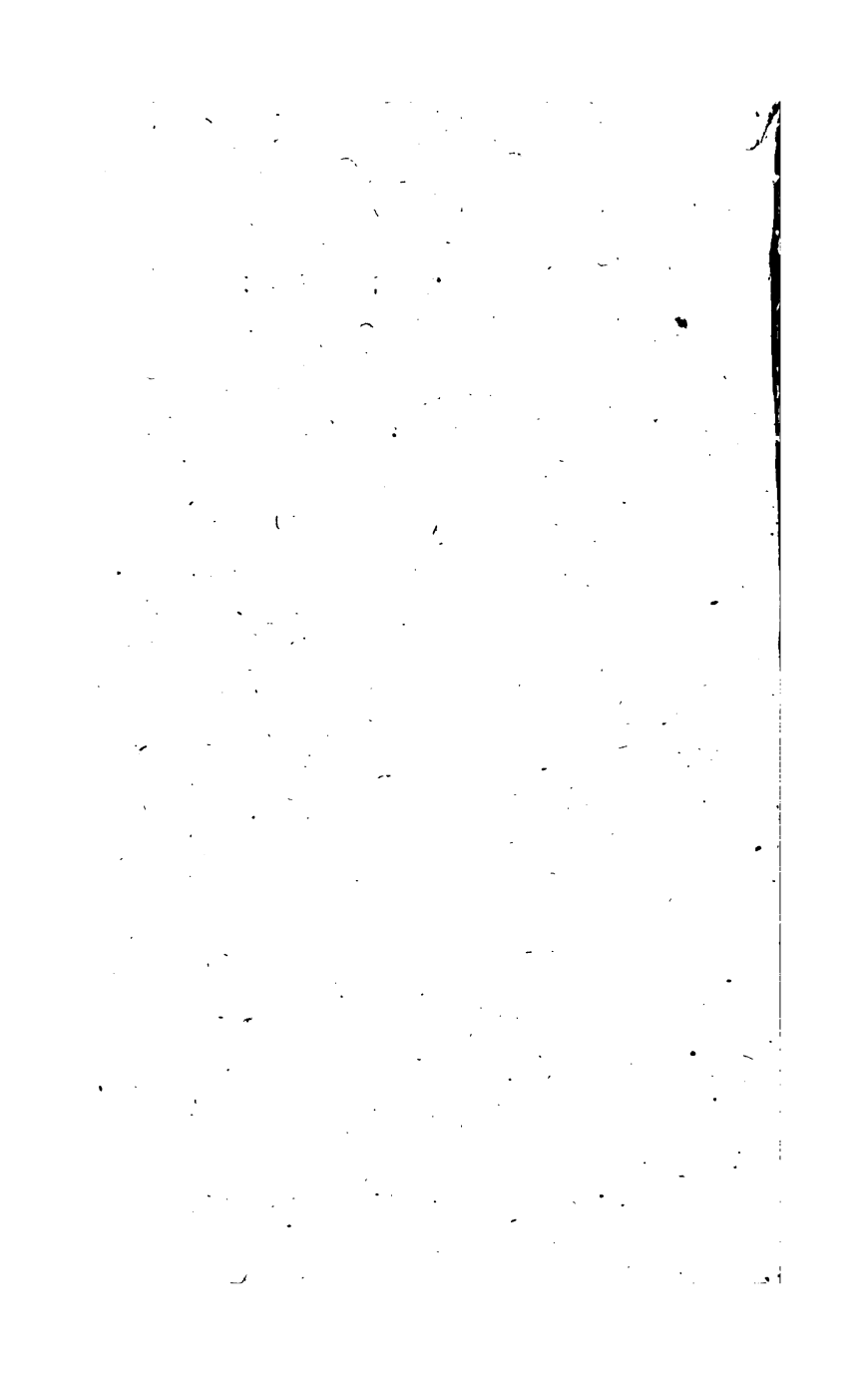
WIDENER LIBRARY



HX ISPW 0















HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXXX.

¹ ⁷ ⁸⁰
Avec les Mémoires de Mathématique & de
Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A AMSTERDAM,

Chez PIERRE MORTIER.

M. DCCXXXIII.

¹ ⁷ ³
Avec Privilège de N.S. les Etats de Hollande & de West-Frise.

A
KSD 208



PRIVILEGIE.

DE Staten van Holland en West-Friesland doen te weten, Alzo ons te kennen isgegeven by **PIERRE MONTIER**, Burger, en Boekverkoper Binnen Amsterdam, hoe dat hy door inkoop aan zig verkregen hadde alle de Exemplaren, Regt van Copey, en Kopere Platen, van *Historia Academia Regia Scientiarum*, *Auctore J. B. du Hamel*, en *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique Et de Physique, tirés des Registres de cette Académie, commencée avec l'année 1699, jusques à présent*: Op welke Werken door Ons op den 22 January des Jaars 1706 goetgunstig Octroy was verleent aan wyle **Gerard Kuyper** om dezelve alleen met uytfluyting van alle andere gedurende den tyd van vyftien Jaaren, in zoo veel Deelen, Taalen, en Formaaten, als hy zoude goet vinden, te mogen drukken, doen drukken, uytgeven en verkoopen, met een poenaliteit van Drie hondert Guldens tegens de Overtreeders; En door dien het opgemelde Octroy reets zedert eenigen tyd geeindigt, en hy Suppliant werkelyk bezig zynde de gemelde werken van *Historia Academia Regia Scientiarum Auctore J. B. du Hamel*, en *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique Et de Physique, tirés des Registres de cette Académie*, van Jaare tot jaare, met het drukken te vervolgen, en boven dien te vermeerderen met een *Recueil des Machines approuvées par l'Académie Royale des Sciences dont il est parlé dans l'Histoire Et dans les Mémoires de cette Académie Et autres, avec les Explications de Mrs. de l'Académie Royale des Sciences, enrichies de plus de 200 fig.* En een *Récueil de toutes les Pièces qui ont remporté les Prix proposés par l'Académie Royale des Sciences*; benevens eene *Table Alphabétique des Matières contenues dans l'Histoire Et les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, publiées dans son ordre*. En eindelyk nog alle de *Mémoires de Mathématique, de Physique Et autres Pièces publiées par l'Académie Royale des Sciences, depuis son commencement jusques à l'année 1698 inclusivement*; wel verstaande van het laatstgenoemde maar alleen die Stukken, of Deelen, die tot nog toe in de Provintie van Holland en West-Friesland nooyt waren gedrukt geweest; waar toe hy Suppliant zeer grootte koste en moeyte genootzaakt was aan te wenden: En bedugt zynde dat eenige baatzugtige Menschen hem Suppliant in zyn voorneemen mogten willen contramiseren, of alle de voorgemelde Werken in het geheel

P R I V I L E G I E.

of ten deele, of onder eenige andere Tituls ofte Naamen na te drukken, doen drukken, en te verkoopen, tot overgrootte schade van hem Suppliant; en om daar in te wezen gefecureert, zo keerde den Suppliant hem tot Ons, ootmoediglyk verzoekende dat Wy hem Suppliant goetgunstig geliefden te verleenen speciaal O&roy en Privilegie, omme alleen geduurende den tyd van vyftien eerftkomende Jaaren, te mogen drukken, doen drukken, uytgeven en verkopen, *Historia Academiae Regia Scientiarum, Auctore J. B. du Hamel, en Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique & de Physique tirés des Registres de cette Académie*, met alle de nog volgende deelen en stukken; en *Recueil des Machines approuvées par l'Académie Royale des Sciences, dont il est parlé dans l'Histoire & Mémoires de cette Académie & autres, avec les Explications de Mrs. de l'Académie Royale des Sciences, Enrichies de plus de 200 fig.* benevens een *Recueil des Pièces qui ont remporté les Prix proposés par Mrs. de l'Académie Royale des Sciences*, en een *Table Alphabétique des Matières contenues dans l'Histoire & les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, publiées dans son ordre; en Eindelyk nog alle de *Mémoires de Mathématique, de Physique, & autres Pièces publiées par l'Académie Royale des Sciences, depuis son commencement jusques à l'année 1698. inclusivement*; wel verstaende van het laest-genoemde Werk maer alleen alle die stukken ofte deelen, die tot-nog toe, in de Provintie van Holland of West-Friesland nooyt waren gedrukt geweest; alles in zoo veele deelen, Taalen, en formaaten als hy Suppliant zoude mogen goet vinden, met speciaal verbod aen alle andere om dezelve Werken, of eenige van-dien in het geheel, of ten deele, of onder andere Tituls of Naamen, na te drukken, te doen na drukken, ofte elders nagedrukt zynde in deze Provintie in te brengen, te verruylen ofte te verkopen, veel min eenige uyttreksels van dezelve, van wat natuure, naame, ofte in wat Taale dezelve souden mogen zyn, te moogen maaken ofte doen maaken, drukken of verkoopen, op een Boete van Drie-duysent Guldens, ofte soo veel hét ons soude goed dunken tot meer affchrik, by de Contraventeurs te verbeuren, alsoo de Boete van Drie honderd Guldens in voorgaende O&roye van den 22 January 1706, tegens de Overtredders gestipuleerd, niet genoeg zynde om baetzugtige menschen van haer voorneemen tot merkelyke schade van den Suppliant af te schrikken, en de bovengemelde

P R I V I L E G I E.

de Werken voor den Suppliant van de grootste aangelegenheyt zynde. SOO IS 'T, Dat wy de zaake en de het voorz: verzoek overgemerkt hebbende, ende genegen wezende ter beede van den Suppliant, uyt onse regte wetenschap, Souveraine magt, ende Auctoriteit, den zelven Suppliant geconsenteert-, geaccordeert, en geotroyeert hebben, consenteeren, accordeeren, en otroyeeren hem by dezen, dat hy gedurende den tyd van vyftien eerst agter een volgende Jaaren, de bovengemelde Werken in dier voegen als zulks by den Suppliant is versogt, en hier vooren uytgedrukt staat, binnen den voorz. Onsen Lande alleen sal mogen Drukken, doen Drukken, Uytgeven, ende Verkopen, verbiedende daeromme allen ende een ygelyken dezelve Werken in 't geheel ofte ten deele, te drukken, naer te drukken, te doen nadrukken te verhandelen of te verkoopen, ofte elders nagedrukt binnen dezelve onzen Lande te brengen, uyt te geven, ofte te verhandelen en verkoopen; op verbeurte van alle de naargedrukte, ingebragte, verhandelde ofte verkogte Exemplaren, ende een Boete van Drie duysent Guldens daer en boven te verbeuren, te appliceeren een derde part voor den Officier die de Calange doen sal, een derde part voor den Armen der plaetse daer het Casus voorvallen sal, ende het resterende derde part voor den Suppliant, en dit telkens zo menigmael als dezelve sullen werden agterhaeld. Alles in dien verstaande, dat wy den Suppliant met desen onsen Otroye alleen willende gratificeeren, tot verhoedinge van zyne schaade door het nadrukken van de voorz. Werken, daer door in geenigen deelen verstaen, den innehouden van dien te autoriseeren ofte te advoueren, ende veel min het zelve onder onse protectie ende bescherminge eenig meerder credit, aansien ofte reputatie te geven, nemaer den Suppliant in cas daer inne iets onbehoorlyks zoude insinueren, alle het zelve tot zynen laste zal gehouden wesen te verantwoorden; tot dien eynde wel expresselyk begeerende dat by aldien hy desen onsen Otroye voor dezelve Werken sal willen stellen, daer van geene geabrevieerde ofte gecontraheerde mentie sal mogen maaken, nemaer gehouden wesen het zelve Otroy in 't geheel en sonder eenige omiffie daer voor te drukken, of te doen drukken; ende dat hy gehouden sal zyn een Exemplaar van de voorz. Werken op Groot papier, gebonden, en wel geconditioneert, te brengen in de Bibliotheecq van onse Universiteit te Leyden, binnen

PRIVILEGIE.

den tyd van ses weeken, na dat hy Suppliant de voorfsz. Werken sal hebben beginnen uyt te geven, op een boete van ses hondert Guldens, na expiratie der voorfsz. ses weeken, by den Suppliant te verbeuren ten behoeven van de Nederduytsche Armén van de plaats alwaar den Suppliant woont, en voorts op peene van met der daat versteeken te zyn van het effect van deesen Oñtroye: dat ook den Suppliant, schoon by het ingaan van dit Oñtroy een Exemplaar geleverd hebbende aan de voorfsz. onse Bibliotheecq, by zoo verre hy gedurende den tyd van dit Oñtroy dezelve werken zoude willen herdrukken met eenige observatien, nooten, vermeerderingen, veranderingen, correctien of anders hoe genaemt, of ook in een ander-formaat, gehouden sal zyn wederom een ander Exemplaar van deselve werken geconditioneert als vooren, te brengen in de voorfsz. Bibliotheecq, binnen den zelven tyd, en op de boete en poenaliteit als voorfsz. Ende ten einde den Suppliant desen Onsen Consente ende Oñtroye mooge genieten als naar behooren, lasten wy allen ende eenen ygelyken dien het aangaan mag, dat zy den Suppliant van den inhouden van desen doen, laten, ende gedoogen, rustelyk, vreedelyk, ende volkomentlyk genieten, ende gebruyken, cessierende alle belet ter contrarie. Gegeven in den Hage, onder Onsen Groote Zegele hier aan doen hangen, op den negentienden December in 't Jaar onses Heeren ende Zaligmaakers, Duyfent zeven hondert een en dertig.

J. G. V. BOETZELAER

Ter Ordonnantie van de State

WILLEM BUYA.

Aan den Suppliant zyn nevens dit Oñtroy ter hand gestelt by extract Authentico, haer Ed: Gr: Mog: Resolutien van den 28 Juny 1715 en 30 April 1723, ten einde om sig daar na te reguleeren.

— T A —

T A B L E

POUR

L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

S UR quelques Expériences de l'Aiman.	Page 1
Sur la Lumiere Septentrionale, & sur une autre Lumiere.	8
Sur une nouvelle Construction de Thermometre.	12
Sur la nature de la Terre en général, & sur ses caracteres.	32

A N A T O M I E.

Sur le Crystallin.	44
Diverses Observations Anatomiques.	52

C H I M I E.

Sur les Bouillons de Viande.	61
Sur un grand nombre de Phosphores nouveaux.	65
Observation Chimique.	71

T A B L E.

B O T A N I Q U E.

<i>Sur les Greffes.</i>	74
<i>Sur l'Anatomie de la Poire.</i>	81
<i>Observations Botaniques.</i>	87

G E O M E T R I E.

<i>Sur une Théorie générale des Lignes du quatrième ordre.</i>	93
<i>Sur les Courbes Tautochrones.</i>	119
<i>Sur la Courbe aux approches égales.</i>	129

A S T R O N O M I E.

<i>Sur la Comete de 1729 & de 1730.</i>	134
<i>Sur une Observation de l'Eclipse de Lune du 8 Août 1729, faite à la Nouvelle Orléans dans la Louisiane.</i>	142

G E O G R A P H I E. 144

M E C H A N I Q U E.

<i>Sur les Voûtes.</i>	145
<i>Sur le mouvement des Eaux.</i>	151
	Ma-

T A B L E.

Machines ou Inventions approuvées par l'Académie en 1730. 158

Eloge de M. de Valincourt. 160

Eloge de M. du Verney. 167

Eloge de M. le Comte Marfigli. 179



T A B L E

P O U R L E S

M E M O I R E S.

OBSERVATIONS *Météorologiques* faites à Aix par M. DE MONTVALON, Conseiller au Parlement d'Aix, comparées avec celles qui ont été faites à Paris. Par M. CASSINI. Page. I

Mémoire sur le Crystallin de l'Oeil de l'Homme, des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons. Par M. PETIT le Médecin. 4

Solution fort simple d'un Problème Astronomique; d'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planètes. Par M. GODIN. 33

Mémoire sur le Sel lixiviel du Gayac. Par M. BOURDELIN. 43

Examen & Résolution de quelques Questions sur les Jeux. Par M. NICOLE. 60

De la Méchanique avec laquelle diverses Espèces de Chenilles, & d'autres Insectes, plient & roulent des feuilles de Plantes & d'Arbres, & sur-tout celles du Chêne. Par M. DE REAUMUR. 79

Métho-

T A B L E.

<i>Méthode pour trouver les Tautochrones, dans des Milieux résistans, comme le Quarré des Vitesses. Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à Bâle.</i>	109
<i>De l'importance de l'analogie & des rapports que les Arbres doivent avoir entre eux pour la réussite & la durée des Greffes. Par M. DU HAMEL.</i>	147
<i>Seconde Partie de l'Examen de la Poussée des Voûtes. Par M. COUPLET.</i>	167
<i>Suite des Observations sur l'Aiman. Par M. DU FAY.</i>	204
<i>Examen des Lignes du quatrieme ordre, ou Courbes du troisieme genre. Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.</i>	226
<i>Examen Chymique des Viandes qu'on employe ordinairement dans les Bouillons; par lequel on peut connoître la quantité d'Extrait qu'elles fournissent, & déterminer ce que chaque Bouillon doit contenir de suc nourrissant. Par M. GEOFFROY le Cadet.</i>	312
<i>La Courbe Descensus æquabilis dans un Milieu résistant comme une puissance quelconque de la Vitesse. Par M. DE MAUPERTUIS.</i>	333
<i>De la nature de la Terre en général, & du caractère des différentes especes de Terres. Par M. DE REAUMUR.</i>	349
<i>Sui-</i>	

T A B L E.

- Suite des Observations de la Comète qui a commencé à paroître à la fin de Juillet de l'année 1729.* Par M. CASSINI. 406
- Anatomie de la Poire.* Par M. DU HAMEL. 426
- Observation anatomique sur une altération singulière du Crystallin & de l'Humour vitrée.* Par M. MORAND. 467
- Méthode pour déterminer le sort de tant de Joueurs que l'on voudra, & l'avantage que les uns ont sur les autres, lorsqu'ils jouent à qui gagnera le plus de parties dans un nombre de parties déterminé.* Par M. NICOLE. 471
- Sur les mouvemens de la Tête, du Col, & du reste de l'Epine du Dos.* Par M. WINSLOW. 492
- Maniere de faire le Sublimé corrosif en simplifiant l'opération.* Par M. BOULDU. 508
- Examen des Lignes du quatrième ordre. Seconde Partie de la Section I. dans laquelle on traite en général des Lignes du quatrième ordre qui ont des points doubles.* Par M. l'Abbé DE BRAGELONGNE. 517
- De la Capsule du Crystallin.* Par M. PETIT le Médecin. 622
- Observation de l'Eclipse du Soleil, faite à son lever,*

T A B L E.

ver, le 15 Juillet de cette année 1730. Par
M. CASSINI. 643.

*Règles pour construire des Thermometres dont
les degrés soient comparables, & qui donnent
des idées d'un Chaud ou d'un Froid qui puis-
sent être rapportés à des mesures connues.* Par
M. DE REAUMUR. 645.

Nouvelles Propriétés de l'Hypertole. Par M.
MAHIEU. 723

*Mémoire sur un grand nombre de Phosphores
nouveaux.* Par M. DU FAY. 748.

Réflexions sur le mouvement des Eaux. Par M.
PITOT. 765.

*Recherches anatomiques sur les Os du Crâne de
l'Homme.* Par M. HUNAUD. 777.

*Remarques sur un Ecrit de M. Davall, qui se
trouve dans les Transactions Philosophiques de
la Société Royale de Londres, N°. 402, an.
1728, touchant la comparaison qu'a fait M.
Delisle, de la grandeur de Paris avec celle
de Londres, dans les Mémoires de l'Acadé-
mie Royale des Sciences, année 1725, page 48.*
Par M. DE MAIRAN. 801.

*Observations Météorologiques faites pendant l'an-
née 1730.* Par M. MARALDI. 818.

*Phaseolus Peregrinus, flore roseo, semine to-
mentoso. Phaseolus Indicus, hederæ folio*
an.

T A B L E.

anguloso , semine oblongo , lanuginoso.
Raii Hist. 3. 438. Par M. NISSOLE,
de la Société Royale des Sciences de
Montpellier. 821



HISTOIRE

D E

L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCXXX.



PHYSIQUE GENERALE.

SUR QUELQUES EXPERIENCES

*DE L'AIMAN. **



OUS supposons ici tout ce qui a été dit en 1728 †, sur des Expériences de l'Aiman, faites par M. du Fay. Il en résulte que le Tourbillon, qui se forme autour de tout Aiman, n'est pas double, comme M. Descartes l'avoit conçu, mais simple; toute la matière magnétique entre par le Nord de l'Aiman, & sort par le Sud, pour rentrer ensuite par le Nord. Il faut développer un peu plus cette idée, pour l'intelligence de ce qui suivra.

On

* V. les M. p. 204. † p. 1. & suiv.
Hist. 1730. A

2 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

On doit concevoir un Aiman comme un corps où sont ouvertes une infinité de routes paralleles, telles que par quelque cause que ce soit la matiere magnétique qui pénètre ce corps s'y peut mouvoir en un certain sens, du Nord au Sud, & ne le pourroit du Sud au Nord. Et parcé que cette matiere se meut avec beaucoup plus de facilité dans l'Aiman que dans l'air, lorsqu'après être entrée par le Nord de la Pierre elle en est sortie par le Sud, elle ne continue pas son chemin en ligne droite dans l'air, comme il semble qu'elle le devroit, mais elle se réfléchit pour retourner au Nord de l'Aiman, & rentrer par-là; c'est ce qui fait le Tourbillon. Tout cela, quoique sujet à de grandes difficultés, est si constant par les faits visibles, qu'on ne peut se dispenser de l'admettre, en attendant l'éclaircissement des difficultés.

Les Physiciens prennent la Terre pour un grand Aiman. La matiere magnétique entrée uniquement par le Nord de la Terre, selon M. du Fay, sort donc par le Sud. Si l'on suppose un Aiman ordinaire, posé de sorte que son Nord soit tourné vers le Nord de la Terre, la matiere magnétique sortie par le Sud de la Terre, & qui en va chercher le Nord, rencontre le Sud de l'Aiman par où elle ne peut entrer; & si cet Aiman est aisément mobile, comme il le sera étant posé sur l'eau dans une petite Gondole, elle le tournera de façon qu'elle le puisse pénétrer, c'est-à-dire, qu'elle fera prendre à son Nord la place de son Sud, & par conséquent le Sud de l'Aiman sera dirigé vers le Nord de la Terre.

Terre. Il peut y avoir de l'équivoque ou de l'embarras dans les expressions dont on se sert sur ce sujet, parce que c'est le Sud propre d'un Aiman qui se dirige vers le Nord de la Terre, & M. du Fay a cru devoir fixer les idées en ne distinguant les Poles d'un Aiman que par la direction qu'ils prennent.

Dans un Aiman les routes de la matiere magnétique sont déterminées, comme nous venons de le dire, elles ne lui permettent de se mouvoir qu'en un sens: mais le Fer, qui certainement est un Aiman imparfait, l'est en ce que ces mêmes routes n'y sont pas si déterminées; les petits poils dont il est hérissé intérieurement, peuvent se coucher en un sens, & après cela se coucher en sens contraire, selon qu'il a été expliqué en 1728, & par conséquent la même route admettra la matiere magnétique mûe tantôt en un sens, tantôt dans le sens opposé.

Voilà quels sont les principes essentiels du Systême de M. du Fay: il a songé à le fortifier, soit en l'employant à expliquer des phénomènes, qui ne l'ont pas été si heureusement jusqu'ici, soit en satisfaisant aux objections dont on pourroit l'attaquer.

La plupart des Physiciens prétendent que dans un Aiman le pôle qui se dirige vers le Nord a beaucoup plus de force que l'autre, & ils croient que la proximité du pôle Boréal de la Terre en est la cause: mais sans compter que ce devroit être le contraire dans les pays situés au-delà de l'Equateur, ce qui n'est rien moins que certain, une Expérience, qui paroît décisive, renverse cette ex-

4 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

plication. M. du Fay a approché assez près l'un de l'autre deux Aimans assez égaux en force; il ne faut pas qu'ils se touchent, car ils ne feroient plus qu'un Aiman: il a plongé dans de la limaille de Fer le pole de l'un, qui en a pris autant qu'il en pouvoit porter. Si le voisinage du second a rendu ce premier capable de porter plus de limaille, il a dû en lâcher, en laisser tomber une partie, quand on a éloigné le second; c'est cependant ce qui n'est jamais arrivé dans l'Expérience bien répétée.

Ce fait se déduira sans peine de l'hypothèse d'un Tourbillon, ou Courant unique. La matiere magnétique une fois entrée dans un Aiman n'en sort, pour ainsi dire, que le plus tard qu'elle peut, parce qu'elle trouve beaucoup plus de facilité à s'y mouvoir que dans l'air; quand elle est entrée, elle sortoit de l'air, elle n'avoit qu'un mouvement pénible, elle est entrée toute dispersée, & a pris une assez grande étendue autour du pole qui se présentoit: mais quand il a été question de sortir de la pierre, elle y a prolongé son cours autant qu'il se pouvoit pour éviter l'air, & par-là elle s'est rassemblée & serrée vers le pole de la sortie. Or le pole de l'entrée a été le Nord de l'Aiman dirigé vers le Sud de la Terre, & le pole de la sortie est le Sud de l'Aiman dirigé vers le Nord de la Terre. De-là suit évidemment la conséquence.

M. du Fay assure en général, que l'hypothèse du Courant simple s'accommodera mieux avec les phénomènes de l'Aiman, & il fait voir qu'elle quadreroit fort bien avec l'idée qu'a

qu'a eue le célèbre M. Halley, de rapporter les Aurores Boréales à la matiere magnétique. Mais cette idée n'est pas encore elle-même assez établie, pour donner beaucoup de poids à celles qu'elle confirmeroit.

On objecte à l'hypothese de M. du Fay, que le Courant unique formé d'une matiere sortie par le Sud de la Terre; & qui va retrouver le Nord, poufferoit selon la direction du Sud au Nord tous les Aimans qui pourroient se mouvoir librement, & leur donneroit en ce sens un mouvement de progression, au-lieu qu'ils n'ont constamment que celui de direction, par lequel leurs poles se tournent comme il convient. On ne doit pas trouver cet inconvénient dans l'hypothese des deux Courans, qui étant opposés, se balancent l'un l'autre. La réponse est aisée. La matiere magnétique qui va du Sud au Nord poufferoit en effet l'Aiman selon cette direction, si en venant heurter sa surface extérieure elle y trouvoit de la résistance; mais elle n'y en trouve aucune; elle ne la heurte pas, elle la pénètre dès qu'elle la rencontre, & se plonge dans l'intérieur de la pierre. On sait que cette extrême facilité de la matiere magnétique à pénétrer l'Aiman n'a pas été imaginée pour le besoin présent, mais qu'elle est établie depuis longtems par les phénomènes. Cette matiere n'agit que sur les parties intérieures de l'Aiman, qu'elle arrange & qu'elle accommode à son cours, mais ce ne sont que celles qui sont de la dernière finesse.

Il suit de-là, qu'elle se meut dans des espaces extrêmement étroits, & d'où l'air est exclus;

clus; & cela même fournit à M. du Fay une réponse à l'objection qu'on lui a faite contre les petits poils du Fer, qu'il a supposé qui tombent par leur poids d'un sens ou d'un autre. Ce poids, a-t-on dit, doit être compté pour nul à cause de l'extrême délicatesse des poils. Il devroit être effectivement compté pour nul, si les poils étoient dans l'air; mais ils n'y sont pas, & il leur arrive la même chose qu'à une Plume, qui dans le Vuide de la Machine Pneumatique tombe avec la même vitesse, ou a le même poids, que si elle étoit de Plomb.

La vitesse de la matiere magnétique doit être proportionnée à sa subtilité, & à cette occasion M. du Fay a eu la pensée de mesurer cette vitesse. Il a conçu que si une Aiguille de Fer non aimantée passoit dans le Tourbillon d'un Aiman avec la même vitesse dont ce Tourbillon se meut, elle ne s'y aimanteroit point, parce que la matiere magnétique du Tourbillon ne pourroit faire aucune impression sur elle. Il y a fait passer une Aiguille avec toute la vitesse qu'elle avoit pu prendre de la détente subite d'un Ressort de Montre, mais elle s'est aimantée comme elle auroit fait à la maniere ordinaire, & par conséquent elle auroit eu besoin d'une vitesse beaucoup au-delà de celle qu'elle avoit. Il n'est pas permis de conjecturer seulement jusqu'où cela pourroit aller. Cette tentative inutile n'est rapportée ici que pour donner lieu à d'autres qui pourroient réussir: quelquefois il ne faut qu'avertir les bons esprits de tourner leurs vues d'un certain côté.

Pour

Pour dernière preuve des petits poils du Fer, & des qualités qu'on est obligé de leur attribuer, M. du Fay apporte la différence des effets magnétiques du Fer, de l'Acier & de l'Acier trempé. Cette transposition de pôles, dont nous avons parlé en 1728, si facile & si prompte dans le Fer, l'est beaucoup moins dans l'Acier, & moins encore dans l'Acier trempé; &, ce qui en est une suite, l'Acier trempé, toutes choses d'ailleurs égales, a plus de force, & une force plus durable que l'Acier, & l'Acier plus que le Fer. La raison en saute aux yeux; les poils du Fer ont perdu leur extrême mobilité, & se sont roidis plus ou moins, ou collés les uns contre les autres, ou avec les parties voisines.

Toute cette Théorie n'est pas une pure Théorie, qui ne produise rien. M. du Fay en tire quelle est la meilleure manière d'aimanter les Aiguilles, & on la devinera de soi-même, pourvu qu'on ait une idée bien nette du Tourbillon unique, de sa direction, des petits poils du Fer. On travaille avec une sorte de supériorité sur la matière, quand on opère en vertu d'un Système.

*SUR LA LUMIERE SEPTENTRIONALE,
ET
SUR UNE AUTRE LUMIERE.*

LE spectacle de la Lumiere Septentrionale a continué en 1730, rarement à la vérité, mais en recompense avec des circonstances toutes nouvelles, comme s'il les affectoit de peur d'ennuyer.

M. Bouillet, Correspondant de l'Académie, dont nous avons déjà parlé plusieurs fois, la vit à Besiers le 6 Mars, à 7 heures du soir, d'un fort beau rouge, élevée de plus de 20 degrés sur l'Horizon; mais la Lune, qui se leva à 7 heures 30', la fit disparoitre, & il ne fut que sur le rapport de quelques Pêcheurs de Vendres, qu'elle avoit été vue encore à 11 heures.

Une Lumiere, & plus visible, & tout-à-fait singuliere, fut observée le soir du 9 Octobre, d'un côté par M. Cassini en Picardie, & de l'autre par M. de Mairan à Breuilpont. M. de Mairan qui commença à l'observer à 8 heures, & qui se tient sûr qu'elle ne commença pas plutôt, la vit à la place, de la couleur, & de la forme ordinaire des Aurores Boréales, c'est-à-dire, sans jets & sans colonnes qui en partissent, longue de 9 à 10 degrés, dont elle s'étendoit horizontalement vers le Midi, à compter des Pleiades d'où elle

elle parloit , & large de 4 degrés. Mais 7 ou 8 minutes après , elle commença à s'ébrecher vers le milieu , comme pour se diviser , & se divisa en effet en deux Ovales lumineuses inclinées à l'Horizon , longues chacune de 15 à 18 degrés , sur 5 à 6 de largeur , entre lesquelles on voyoit les Pleiades qui les séparaient. Ce fut en cet état que M. Cassini vit le Phénomene à 7 heures 20'. Alors , qui ne l'avoit pas vu dans sa premiere forme , ne le pouvoit guere reconnoitre pour une Aurore Boréale.

Ensuite les deux Ovales s'affoiblirent de clarté , & changerent de contours ou de figure , mais inégalement & differemment l'une & l'autre , & enfin un peu après 9 heures , elles ne subsistoient plus.

Cependant à 10 heures $\frac{1}{2}$ ou 11 heures , M. de Mairan vit surement l'Aurore Boréale , foible , à la vérité , mais à sa place naturelle & sous l'Etoile Polaire. Elle étoit contiguë à l'Horizon , sans interposition de nuages obscurs , elle y étoit plus marquée que par-tout ailleurs. Elle alla en s'affoiblissant jusque vers minuit , où l'Observateur la quitta.

Le P. Rouché , Religieux de l'Ordre de S. François , observa aussi à Poitiers le même Phénomene du 9 Octobre , depuis 8 heures du soir jusqu'à 9 , mais il le vit sous une autre forme que M^{rs}. Cassini & de Mairan , quoiqu'à peu près dans le même lieu du Ciel. C'étoit d'abord un demi-Cercle , dont le diamètre , tourné en haut , étoit parallele à l'Horizon , & long de plus de 20 degrés. Ensuite ce demi-Cercle se partagea en deux autres

moindres & contigus par leurs diametres, qui faisoient une même droite, parallele encore à l'Horizon. Ces figures si régulières ne durèrent pas longtems, les deux petits demi-Cercles se réunirent pour former un plus grand Cercle presque entier, mais très mal terminé dans la portion qui lui manquoit. Enfin cela devint une espece de Segment de Cercle qui finissoit par un Trident, dont les dents étoient fort longues & bien séparées. Ces apparences-là sont assez différentes des autres, & peut-être difficiles à concilier avec elles. Tout le Phénomene avoit une très grande blancheur, & un mouvement très lent.

Jusqu'ici nous n'avons rapporté que des Aurores ou Lumieres Septentrionales, différentes seulement entre elles par des circonstances plus ou moins particulieres. Mais voici enfin une Lumiere différente par l'endroit qui paroît leur être le plus essentiel, une Lumiere entierement Méridionale. Elle fut vue à Bésiers le 15 Février de cette année, par M^{rs}. Bouillet & Astier l'aîné, trois quarts d'heure après le coucher du Soleil. Elle commençoit à l'endroit où il s'étoit couché, passoit du côté de l'Occident par les dernières Etoiles des Poissons, s'élevoit vers le Zénith jusqu'à l'Oeil du Taureau, & se terminoit dans la constellation du Lion, en suivant, mais non pas toujours exactement, la position & le cours de l'Ecliptique. On voit par-là qu'elle étoit toute Méridionale, beaucoup plus remarquable & plus parfaite sur ce point que le demi-grand Cercle vertical, dont nous
avons

avons parlé en 1729, & qui jusque-là étoit unique.

Cette Lumiere formoit une Zone ou bande d'environ 10 degrés de largeur, & qui dans la plus grande hauteur étoit élevée de 52 degrés sur l'Horizon. Elle étoit fort rouge, & selon l'ordinaire de ces Phénomènes, n'effaçoit pas les Etoiles qu'elle couvroit. Audelà de cette Zone rouge, il y avoit vers le Midi une autre Zone de Lumiere blanchâtre, presque contiguë à la premiere du côté de l'Orient, & qui s'en éloignoit en allant vers le Méridien; & au-dessous de cette Lumiere blanche étoit un nuage obscur, qui s'étendoit jusqu'à l'Horizon, tandis que le reste du Ciel étoit fort serein.

Par la position qu'avoit la Lumiere rouge rapportée aux Etoiles fixes, M. Aftier s'aperçut que cette position changeoit, & que la Lumiere avoit un mouvement, mais assez petit, du Nord au Sud. La Lumiere blanche, qui se tenoit toujours à la même distance de l'autre, en avoit un pareil.

Les deux Observateurs eurent des affaires, qui ne leur permirent pas de pousser l'observation au-delà de 8 heures $\frac{1}{2}$. Ils ne virent point d'Aurore Boréale: seulement M. Aftier, qui se retira le dernier, en soupçonna une en se retirant; mais elle a été vue sûrement ailleurs dans le même Pays. Par les observations de M. de Guibal, qui étoit à S. Chignan, M. Aftier conjecture qu'il y avoit quelque correspondance entre la Lumiere Méridionale & la Septentrionale, parce que la premiere baissoit, tandis que l'autre s'élevoit; mais on n'a rien d'assez positif sur ce point.

Quelque différentes que soient ces deux Lumières par leur position, elles sont d'ailleurs si semblables, que la présomption est grande pour la correspondance.

Comme depuis 15 ans, que nous parlons toujours de cette matière, il semble qu'elle ne fait que s'embarraffer de plus en plus par la multitude & la variété des circonstances & des accidens du Phénomene, peut-être ferons-nous plaisir au Public, d'annoncer que M. de Mairan a entrepris de réduire le tout à un Système réglé, qui paroitra dans peu.

~~~~~

*SUR UNE NOUVELLE CONSTRUCTION*

*DE THERMOMETRE. \**

**O**N fait assez par ses propres réflexions, pour peu qu'on en ait fait en observant le Thermometre, combien cet Instrument si commode, d'un si grand usage, & même si agréable, est cependant défectueux; nous ne parlons que de celui de Florence ou de Sanctorius, qui est presque le seul, car celui de M. Amontons, dont nous avons parlé en 1702 †, est peu connu & peu usité, quoique construit sur de meilleurs principes, & d'une manière fort ingénieuse; mais comme il est d'une construction difficile, & qui demandoit, du moins pour un tems, la main de l'Auteur lui-même, sa mort, qui survint, empêcha qu'il

\* V. les M. p. 615. † p. 1. & suiv.

qu'il ne s'en répandît un assez grand nombre.

Nos Thermometres ordinaires marquent, à la vérité, les differens degrés de chaud ou de froid, mais chacun les marque pour soi & à sa maniere, parce qu'ils ne sont partis d'aucun point de chaud ou de froid, qui leur fût commun. C'est ainsi que deux Pendules qui n'auroient pas été mises d'abord sur la même heure au Soleil, marqueroient bien chacune, que pendant un certain tems il se seroit écoulé une heure, deux heures, &c. mais non pas quelle heure il seroit au Ciel. De plus, en supposant les deux Pendules justes, on pourroit bien s'assurer que le même tems se seroit écoulé, quand elles le marqueroient toutes deux; mais on ne peut pas s'assurer pareillement que quand la liqueur s'est élevée d'un degré dans deux Thermometres differens, il y ait eu de part & d'autre un nouveau degré de chaleur égal; car 1°. l'Esprit de Vin. peut n'être pas le même dans les deux Thermometres, & selon qu'il sera plus ou moins bien rectifié, il se dilatera plus ou moins à une même chaleur, ou, ce qui revient au même, celui qui a été bien rectifié se dilatera & montera d'un degré à une certaine chaleur, tandis que l'autre ne sera monté du même degré qu'à une chaleur plus forte. 2°. En graduant les Thermometres, on prend pour degrés égaux de l'ascension de la liqueur, des parties égales de la longueur des tuyaux: cependant en supposant les diametres des tuyaux d'une égalité parfaite, ce qui est tout au moins très difficile, ils ont souvent dans leur intérieur

la glace naturelle qu'on employera seroit plus ou moins froide, il faudra s'en tenir au point où la premiere surface de l'eau, qui se gele-  
ra artificiellement, sera prise, car, selon la  
remarque de M. de Reaumur, cette premie-  
re action du froid doit être toujours assez é-  
gale, & il ne peut guere survenir d'inégalités  
que dans la suite par une espece d'accéléra-  
tion plus ou moins forte. Quand de la ma-  
tiere, dont le mouvement causoit & entre-  
tenoit la liquidité, une eau en a assez perdu  
pour n'être plus liquide dans sa surface, il  
paroît qu'une autre eau en doit perdre pré-  
cisément autant pour se trouver au même  
état; quoique les causes de froid, qui agis-  
sent sur l'une & sur l'autre, ne soient pas  
exactement égales, ce ne sera que leur action  
continuée qui rendra leur difference sensible.  
Après tout, il ne s'agit en tout ceci que d'é-  
galités physiques, qui ne peuvent jamais être  
aussi justes que les géométriques.

Le froid de la congélation artificielle de l'eau  
étant pris pour point fixe, & en même tems,  
si l'on veut, la chaleur de l'eau bouillante, il  
faut graduer un Thermometre par rapport à  
ces points, c'est-à-dire, le diviser en degrés  
égaux, tels que l'Esprit de Vin y montera  
depuis un froid plus grand que celui de la  
congélation jusqu'à cette congélation, & de-  
là jusqu'à la chaleur de l'eau bouillante. M. de  
Reaumur a pris une idée fort nouvelle sur  
cette graduation. Les degrés égaux le sont,  
non par rapport à la longueur du tuyau, nous  
en avons vu l'erreur manifeste; mais par rap-  
port aux dilatations de la liqueur; si le volu-  
me

me de la liqueur est de 100 parties, le Thermometre marquera 1 degré, quand ce volume sera augmenté de  $\frac{1}{100}$  partie par la dilatation, 2 degrés quand il sera augmenté de  $\frac{2}{100}$ , &c. ainsi les inégalités intérieures du tuyau ne sont plus à craindre, & quelles que soient celles qui s'y trouveront, il n'en arrivera autre chose, sinon que des degrés égaux de dilatation seront des degrés inégaux sur la longueur du tuyau. Les yeux n'en seront peut-être pas si contents, mais on aura l'avantage réel & solide de savoir au juste de combien une liqueur a augmenté son volume par la chaleur, jusqu'où elle le peut augmenter, combien elle est de tems à prendre cette augmentation, quel est son rapport de dilatabilité à une autre liqueur: instructions qu'on ne pouvoit pas tirer des anciens Thermometres, qui n'en disoient rien, ou ne le disoient que d'une maniere équivoque & confuse.

Graduer le Thermometre selon des degrés égaux d'augmentation de volume, c'est le graduer selon des degrés égaux de capacité de la boule & du tuyau. Que la boule seule, ou la boule, & une certaine partie du tuyau, si l'on veut, contiennent juste 100 parties égales d'eau, chacune de ces parties étant d'une quantité bien exactement connue, il est clair que si ensuite on en verse une nouvelle dans le tuyau, une 2<sup>de</sup>, une 3<sup>me</sup>, &c. & que l'on marque les endroits où la liqueur totale du tuyau se fera élevée, on aura des degrés égaux de la capacité du tuyau, & par conséquent aussi de la dilatation d'une liqueur qui en se raréfiant monteroit à ces différens  
en-

endroits marqués; car la capacité du Thermometre ayant été mesurée de cette maniere, on en ôtera toute l'eau, qui n'a servi qu'à mesurer, & on y mettra l'Esprit de Vin dont on veut observer la dilatation.

Le nombre des degrés de division est arbitraire, mais il ne laisse pas de demander un choix. 100 est trop petit; un plus grand nombre donnera des divisions plus fines, & le Thermometre en fera à cet égard ce qu'on appelle plus *sensible*. M. de Reaumur juge plus commode de prendre toujours des centaines, & il va jusqu'à 1000. Par-là il évite le plus souvent les fractions de degré, & quand il s'en trouve, elles sont assez petites pour pouvoir être négligées.

Quand on a gradué avec de l'eau la capacité du Thermometre, il a fallu déterminer l'endroit où l'on veut que soit l'Esprit de Vin après s'être condensé par la congélation artificielle. Cet endroit sera à peu près au tiers de la longueur du tuyau à compter de la boucle, car l'Esprit de Vin peut ensuite se dilater de plus du double par la chaleur. Il faut que cet endroit soit le nombre de la division choisie, par exemple, 1000, si la division est 1000. Lorsqu'on aura versé l'Esprit de Vin; & qu'on viendra à le condenser par la congélation, s'il est au-dessus ou au-dessous de l'endroit marqué, on lui ôtera, ou bien on lui ajoutera la quantité nécessaire pour l'amener au point requis, & alors on sera sûr qu'on a le volume de 1000 parties connues d'Esprit de Vin condensées par la congélation artificielle.

En voilà assez pour faire entendre en général

néral les principes de la nouvelle construction. Le plus important, c'est l'exactitude parfaite des mesures. Il en faut d'abord de petites, dont chacune contienne ce qu'on appelle une partie, ou de l'eau, ou de l'Esprit de Vin; & M. de Reaumur en indique de si justes, qu'elles ne perdront pas par le mouvement, ni par le transport nécessaire, une seule goutte de la liqueur qu'elles contiendront. Il faut ensuite pour hâter l'ouvrage, en avoir de plus grandes, qui contiendront ces petites un certain nombre de fois précis. Il vaut mieux que ce nombre soit une aliquôte de 100, comme 25. Mais nous supprimons tous ces détails, quoiqu'instructifs, & souvent curieux; on les apprendra du Mémoire de M. de Reaumur, & encore mieux de la pratique.

Dans les Thermometres communs on a adapté à une assez grosse boule un tuyau délié & presque capillaire, afin qu'une très-petite augmentation de volume dans la liqueur de la boule en produisît une grande & bien sensible dans la liqueur du tuyau. C'en étoit assez pour voir que la liqueur étoit raréfiée, dès qu'elle l'étoit, & même qu'elle l'étoit plus ou moins, & l'on ne s'embarrassoit pas de savoir de combien elle l'étoit précisément. Mais dans les Thermometres nouveaux où l'on veut arriver à cette connoissance, qui ne peut résulter que de la mesure exacte des volumes, il est inevitable que les tuyaux soient beaucoup plus gros, parce que l'exactitude & la sensibilité du Thermometre, à mesure qu'on les veut plus grandes, demandent un plus grand nombre de parties de liqueur, & que quelque  
pa-

petites que soient ces parties, elles font un tout confiderable. M. de Reaumur est donc obligé de choquer l'habitude des yeux, & de renoncer à l'agrément du tuyau capillaire. Ce n'est pas la peine de plaider ici la cause de l'utilité & de la justesse, contre un agrément si leger. Cependant par une espece de condescendance, les nouveaux Thermometres pourront avoir des tuyaux qui ne seront pas plus gros que ceux des gros Barometres, auxquels on est assez accoutumé.

M. de Reaumur hazarde encore une autre difformité de ce genre. On dit qu'un Thermometre est plus ou moins sensible, selon qu'une même raréfaction ou condensation arrivée à la liqueur de la boule, est marquée sur le tuyau dans une plus grande ou moindre étendue. M. de Reaumur imagine avec raison une autre sorte de sensibilité. Elle consistera dans la promptitude avec laquelle la liqueur sentira l'action du chaud ou du froid; & la marquera. Comme les boules de ses Thermometres seront plus grosses qu'à l'ordinaire, il a fait réflexion qu'il leur faudroit nécessairement plus de tems pour recevoir jusqu'à leur centre, & dans la totalité de la liqueur, l'action du chaud ou du froid de l'air extérieur. Un remede très simple à cet inconvénient est que les boules, sans rien perdre de leur capacité, soient applatties autant qu'on le jugera à propos: mais il est vrai que les yeux pourront encore le trouver mauvais, du moins dans les commencemens. Peut-être aussi que ces nouveautés de construction seront d'autant plus agréables qu'elles

les seront plus marquées, parce qu'elles promettroient plus sensiblement une plus grande justesse.

On ne peut guere comparer deux anciens Thermometres, ce qui les rend assez inutiles pour des recherches physiques un peu délicates. Le plus ou le moins d'élevation de la liqueur dépend du rapport de la capacité ou du diametre de la boule à la capacité ou au diametre du tuyau. Plus le diametre de la boule est grand par rapport à celui du tuyau, plus la liqueur monte haut par un même degré de chaleur. Pour comparer deux Thermometres differens, ou les degrés de chaleur qui ont agi sur chacun d'eux, il faudroit savoir quel est dans chacun le rapport de ces diametres; mais on ne le fait point, & on ne le peut savoir, ne fût-ce qu'à cause des inégalités intérieures des boules & des tuyaux, qui sont toujours inconnues, car il se trouveroit encore d'autres difficultés. Dans les Thermometres de M. de Reaumur, il ne s'agit plus du tout de ce rapport des diametres des boules & des tuyaux; dès que le point où s'arrête l'Esprit de Vin condensé par la congélation artificielle est marqué sur deux Thermometres, & je suppose ce point inégalement élevé dans les deux, & dès que l'on fait que de part & d'autre l'Esprit de Vin a un certain nombre de parties égales entre elles dans chaque Esprit de Vin, il n'en faut pas davantage, les deux Thermometres marqueront toujours les mêmes degrés de chaleur, quoique ces degrés puissent être inégaux dans l'étendue qu'ils tiendront sur le tuyau.



tuyau. Quand un Esprit de Vin qui aura, par exemple, 400 parties égales, montera d'un degré au-dessus de la congélation, ou, ce qui est le même, aura augmenté son volume de  $\frac{1}{100}$ , & quand un autre Esprit de Vin qui aura 500 parties élémentaires, pour ainsi dire, égales entre elles, & égales à celles du premier, sera monté d'un degré au-dessus de la congélation, ou aura augmenté son volume de  $\frac{1}{100}$ , ce sera toujours le même degré de chaleur qui aura causé la même raréfaction dans les deux volumes différens, quelle que soit d'ailleurs l'étendue dans laquelle ce degré sera marqué à cause de la différente capacité des boules & des tuyaux des deux Thermometres. Si les parties élémentaires d'un Esprit de Vin ont été prises plus grandes que celles de l'autre, mais en même nombre, les degrés d'un des Thermometres seront naturellement plus grands, mais un degré d'élevation plus grand ne sera que l'effet de la même chaleur. Ce sera la même chose, si les parties élémentaires sont prises plus grandes, & en plus grand nombre. Il seroit bon que l'on convînt d'un même nombre total, comme de 1000, pour le nombre de ces parties condensées par la congélation.

Il y a ici une remarque importante à faire, d'après M. de Reaumur. Chacun de ces degrés inégaux en étendue dans deux Thermometres, & peut-être dans le même, marquera bien un degré égal de la dilatation de l'Esprit de vin, mais non pas un degré égal de chaleur. Il n'est pas sûr que la chaleur, toujours augmentée par degrés égaux, produi-

se

se dans l'Esprit de vin des augmentations égales de volume; il est possible qu'à mesure qu'elle croît également, elle trouve toujours ou d'autant plus de facilité ou d'autant plus de difficulté à raréfier l'Esprit de vin, que les premières dilatations coutent à la même cause plus ou moins d'effort que les dernières: cette inégalité est plus que vraisemblable, & l'une & l'autre progression de l'inégalité l'est à peu près également. Nous pouvons ajouter encore, quoiqu'il ne s'agisse ici que de la même liqueur, qu'une liqueur peut se raréfier selon la progression croissante, & une autre selon la progression-décroissante. Deux Thermometres, où l'Esprit de vin fera inégalement élevé, marqueront donc seulement que l'un aura reçu un certain nombre de degrés de chaleur plus que l'autre, mais non pas quel sera le rapport de ces differens degrés entre eux. M. de Reaumur ne croit pas qu'on puisse arriver à cette connoissance exacte, tant il est arrêté qu'il restera toujours beaucoup d'obscurité dans nos lumières.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici, suppose que l'Esprit de vin soit le même dans les differens Thermometres: mais ce seroit une supposition bien fautive dans la pratique. Deux Esprits de vin different extrêmement en qualité, en dilatabilité; cependant les Thermometres ordinaires n'ont aucun égard à cette difference, & c'est-là le dernier que nous ayons à traiter de leurs principaux inconvéniens.

L'Esprit de vin est un mélange d'une Huile éthérée, subtile, inflammable; & d'une  
eau

## 24 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

eau ou flegme: l'Eau de vie n'est aussi que ce mélange, & elle devient Esprit de vin quand on y diminue la dose de l'eau par rapport à celle de l'Huile, ce qu'on appelle *rectification*. L'Esprit de vin est plus ou moins rectifié, & par conséquent différent, selon que la dose de l'Huile est plus ou moins forte; il en est plus ou moins dilatable par la chaleur.

Pour mesurer la dilatabilité d'un Esprit de vin quelconque, M. de Reaumur en prend dans un Matras à long col 400 parties telles qu'elles sont quand la congélation artificielle les a condensées, & ensuite il voit jusqu'où les élève la chaleur de l'eau bouillante, ce qui donnera les deux points fixes. L'opération ne promet pas d'abord un bon succès, car longtems avant que l'eau bouille, l'Esprit de vin bout, & s'élève beaucoup & irrégulièrement, desorte qu'il semble qu'on ne peut ni marquer alors le terme précis de son élévation, ni attendre le tems où l'eau bouillira. Mais il y a un expédient facile & heureux. On n'a qu'à retirer de l'eau chaude l'Esprit de vin qui en est entouré, aussi-tôt ses bouillonnemens cessent, sa surface s'aplanit, & se met tranquillement à un certain point plus élevé que celui où elle étoit: cela vient de la chaleur acquise, qui se conserve quelque tems. On remet ensuite le Matras dans l'eau qu'on rend plus chaude, l'Esprit de vin s'élève encore, bouillonne, mais on le retire encore, & sa surface aplaniée se remet à un nouveau point plus élevé. On recommence ce manège jusqu'à ce que l'eau étant bouillante, la surface aplaniée de l'Esprit de vin, qu'on

qu'on aura retiré de cette eau, & qu'on y aura remis, se tiennent constamment au même point d'élévation dans ces changemens alternatifs, car cela arrivera quand l'Esprit de vin aura pris toute la chaleur qu'il peut prendre par l'eau bouillante sans être échauffé jusqu'au point de bouillir.

L'Esprit de vin le mieux rectifié que M. de Reaumur ait pu trouver à Paris chez les Marchands ordinaires, est tel que s'il est 400 par la congélation artificielle de l'eau, il devient 435 par l'eau bouillante, ce qui est le rapport de 80 à 87. On voit par-là l'intervalle où seront renfermés les degrés moyens pour des Esprits de vin moins rectifiés. Il seroit à propos, & même nécessaire d'écrire sur chaque Thermometre la qualité de l'Esprit de vin exprimée par la dilatation qu'il peut prendre depuis le point où il est 400 par la congélation jusqu'à celui où il sera 435, par ex. ou 434, &c. par l'eau bouillante. Deux Thermometres seront aisés à comparer malgré la différente dilatabilité de leurs Esprits de vin, puisque des degrés inégaux d'élévation de la liqueur, mais correspondans, ne feront que les effets du même degré de chaleur.

Il n'est nullement nécessaire de pousser la longueur des Thermometres jusqu'où la chaleur de l'eau bouillante le demanderoit, puisque celle de l'air n'ira jamais si loin à beaucoup près; cela n'est indispensable que pour l'épreuve de la qualité de l'Esprit de vin: hors de-là de moindres tuyaux suffissent, & il est plus aisé de s'en fournir. Par la même raison de facilité & de commodité, M. de Reaumur

*Hist.* 1730.

B

n'est

n'est pas d'avis qu'on se pique d'employer le meilleur Esprit de vin, il ne s'en trouveroit pas par-tout; le plus médiocre, & même l'Eau de vie suffira, bien entendu toujours que la qualité en sera connue. Les tuyaux seront plus courts pour une liqueur moins dilatable, & les Thermometres pourront assez aisément, si l'on veut, être égaux.

On peut ramener deux differens Esprits de vin à être de la même dilatabilité. Cette liqueur est un composé d'eau & d'huile éthérée, & toute sa dilatabilité n'appartient pas à l'huile seule, l'eau en a aussi sa part, quoique moindre. M. de Reaumur ayant fait prendre à 400 parties d'eau de la Seine tout le froid que pouvoit lui donner d'autre eau qui l'entouroit, & commençoit à se glacer, trouva que par la chaleur de cette même eau bouillante le volume de l'eau de Seine devenoit 415. Ayant pris ensuite de l'Esprit de vin dont le volume condensé par la congélation artificielle de l'eau étoit 400, & devenoit 435 par l'eau bouillante, il a mêlé 300 parties de cet Esprit de vin avec 100 d'eau de Seine, & il a eu un Esprit de vin, dont la dilatation extrême, au-lieu d'être 435, n'étoit plus que 430; & c'est précisément ce qu'on trouvera par le calcul que devoient donner les 100 parties d'eau mêlées aux 300 d'Esprit de vin, selon la proportion de leurs dilatations extrêmes connues par expérience. 200 parties d'eau de Seine mêlées avec 200 parties du même Esprit de vin font un Esprit de vin dont la dilatation extrême n'est plus que 425. La dilatation extrême de l'Esprit de

de vin affoibli se trouve toujours, ou à peu près, celle qui devoit venir selon le calcul.

L'Inverse de cette Méthode seroit de fortifier, pour ainsi dire, un Esprit de vin foible par un autre plus fort, après avoir connu par les épreuves rapportées la dilatabilité de l'un & de l'autre. M. de Reaumur donne la règle mathématique pour avoir par cet alliage des Esprits de vin de tel titre qu'on voudra, car on peut transporter à ce sujet les expressions qui appartiennent aux métaux, puisqu'il est tout pareil. On pourroit donc avoir par-tout de l'Esprit de vin de la même qualité, & des Thermometres parfaitement semblables, ce qui seroit bien le mieux, du moins pour les Savans; mais les Savans eux-mêmes auront peut-être de la peine à entrer dans une convention générale, tant il est difficile que des hommes conviennent.

M. de Reaumur étend jusqu'à une curiosité de Physique assez intéressante, la méthode qu'il a trouvée pour mesurer la dilatabilité de differens Esprits de vin. Un Esprit de vin quelconque est un composé de deux substances différentes, l'eau & l'huile éthérée, toutes deux dilatables, mais différemment; & il s'agit de découvrir autant qu'on le peut, quelle est cette différence. Nous avons vu que si d'un très bon Esprit de vin, qui de 400 deviendroît 435, on en ôtoit 200 parties qu'on remplaçât en eau de Seine; il n'iroit plus que de 400 à 425. Supposons que les 200 parties restantes d'Esprit de vin ne soient que de l'huile éthérée pure; sur la dilatation 25, il en appartient  $7\frac{1}{2}$  parties à

l'eau, puisque cette eau a 200 parties, & que la dilatation de 400 de ces parties iroit à 415; donc 25 moins  $7\frac{1}{2}$ , ou  $17\frac{1}{2}$  sont ce qui appartient à la dilatation de l'huile, & les dilatations de l'huile & de l'eau sont comme  $17\frac{1}{2}$  à  $7\frac{1}{2}$ , ou 7 à 3. Mais il s'en faut bien que dans le mélange d'Esprit de vin & d'eau les 200 parties restantes d'Esprit de vin ne fussent que de l'huile; M. Geoffroi le cadet a fait voir que dans l'Esprit de vin le mieux rectifié, il y a plus de la moitié de flegme ou d'eau, & cette eau peut légitimement passer pour être toute pareille à notre eau commune. Dans le mélange supposé de 200 parties d'eau, & de 200 d'Esprit de vin, il y avoit donc au plus 100 parties d'huile éthérée, & au moins 300 d'eau: n'en prenons que 300. On verra aisément qu'il leur appartient  $11\frac{1}{4}$  parties de la dilatation totale 25, dont le reste qui est  $13\frac{1}{4}$  appartient aux 100 parties d'huile. Mais il faut bien remarquer qu'au-lieu que dans la première supposition les parties d'eau & d'huile étoient en nombre égal, dans celle-ci leurs nombres sont comme 3 & 1. C'est le volume 3 d'eau qui a pris l'augmentation  $11\frac{1}{4}$ , & c'est le volume 1 d'huile qui a pris l'augmentation  $13\frac{1}{4}$ . Or les dilatations sont d'autant plus grandes, non-seulement en même raison que les augmentations de volume sont plus grandes, mais encore en même raison que les volumes primitifs étoient plus petits. Donc la dilatation de l'huile est à celle de l'eau comme le produit de  $13\frac{1}{4}$  par 3 au produit de  $11\frac{1}{4}$  par 1, ce qui donne le rapport de 33 à 9, beaucoup plus

plus grand que le premier de 7 à 3.

C'est-là ce qui se trouve, en supposant que dans les 200 parties d'Esprit de vin, il y en avoit 100 d'huile éthérée; mais s'il n'y en avoit que 50, ce qui est très vraisemblable, auquel cas l'huile ne feroit que la 8<sup>me</sup> partie du mélange total, on trouveroit en faisant le même calcul, que la dilatation de l'huile feroit à celle de l'eau dans un rapport beaucoup plus grand que celui de 33 à 9. M. de Reaumur ne croit nullement impossible que cela n'aille encore plus loin.

Quoi qu'il en soit, il a fait une observation, qui ne doit pas être omise. C'est que les degrés moyens de dilatation de l'huile & de l'eau ou flegme d'un même Esprit de vin, ne sont pas proportionnels aux dilatations extrêmes. L'eau se dilate d'abord plus difficilement que l'huile, & ensuite plus facilement, de sorte que par la continuation du mouvement de dilatation elle repare une partie du désavantage qu'elle avoit eu dans le commencement. C'est ce qui a été reconnu en comparant les dilatations moyennes d'une eau pure à celles d'un Esprit de Vin d'une dilatabilité connue. Si les dilatations de l'eau & de l'Esprit de vin par la chaleur de l'eau bouillante devoient être comme 1 & 2, chaque premier degré de dilatation des deux liqueurs depuis la congélation artificielle, étoient comme 1 & 10. De-là il suit que de deux differens Esprits de Vin, le plus foible, qui par conséquent aura plus d'eau, s'élèvera moins que l'autre dans le commencement de leur marche par un même degré de chaleur,



& que par-là les deux differens Thermometres seront difficiles à comparer, ou même que la comparaison jettera dans l'erreur. Il est vrai que pour les premiers degrés, on pourra compter que la dilatation de l'eau ou flegme fera nulle; mais on ne fait pas précisément à quel nombre de ces premiers, cette supposition peut s'étendre sans une erreur trop sensible. Il est vrai aussi que les dilatabilités extrêmes des deux Esprits de Vin étant connues, on pourra faire des réductions, en concevant que le plus foible des deux n'est que le plus fort affoibli par une certaine quantité d'eau pure: mais ce seront des réductions, & du calcul, & il vaut beaucoup mieux que tous les Thermometres soient faits, s'il est possible, avec le même Esprit de Vin, ce qui sera fort aisé, puisqu'on peut l'amener à telle qualité que l'on veut.

On a vu par les Thermometres, & l'on a dû en être d'abord fort étonné, que le froid faisoit monter la liqueur, & que le chaud la faisoit descendre; mais on a bien-tôt observé que ce n'étoit que dans les commencemens de l'action de l'un & de l'autre, & l'on a conçu que la boule qui se resserroit par le froid avant qu'il se fût fait assez sentir à la liqueur, la faisoit monter dans le tuyau, & qu'au contraire cette même boule échauffée avant que la liqueur le fût, & par conséquent dilatée, la faisoit descendre en devenant d'une plus grande capacité. M. de Reaumur a poussé l'exactitude jusqu'à vouloir déterminer dans quelles bornes cet effet, qui ne pouvoit être considérable, étoit renfermé, & il

a trouvé que la diminution de la capacité de la boule par le froid, ou son augmentation par le chaud, n'alloit qu'à faire monter ou descendre la liqueur dans le tuyau de  $\frac{1}{1200}$  partie de son volume total, & par conséquent de  $\frac{1}{2}$  de partie sur 400, ce qui peut bien être négligé par les plus scrupuleux.

Il ne reste plus qu'une circonstance à examiner. On laisse au haut du tuyau, dont le bout est scellé hermétiquement, un espace que la liqueur dans sa plus grande élévation n'achevera point de remplir. Faut-il que cet espace soit ce qu'on appelle vuide, c'est-à-dire, plein d'un Air très raréfié; ou faut-il y laisser de l'Air ordinaire? Il y a avantage & inconvénient de part & d'autre. Si l'Air est très raréfié, ce qu'on aura aisément exécuté en échauffant beaucoup le bout du tuyau, après quoi on le scellera brusquement, le jeu de la liqueur sera fort libre dans le tuyau, elle montera dans ce vuide, sans y trouver de résistance; mais aussi, l'Air contenu dans l'Esprit de vin s'en dégagera aisément, parce qu'il ne sera point pressé, il enlèvera avec lui les parties les plus subtiles de l'Esprit, & cela en changera la qualité, qu'on suppose pourtant devoir être toujours la même. Si l'Air du haut du tuyau est de l'Air ordinaire, la qualité de l'Esprit de vin ne changera pas; mais cet Air se raréfiera par la chaleur aussi bien que l'Esprit de vin, & repoussera en en-bas cet Esprit qui tendoit à se dilater. Dans l'embarras de ce pour & de ce contre qui ne peuvent être évalués précisément, M. de Reaumur prend le parti que la prudence con-

feuille en pareil cas; un parti moyen: il faudra de l'Air médiocrement échauffé.

*SUR LA NATURE DE LA TERRE*

*EN GENERAL,*

*ET SUR SES CARACTERES \*.*

**N**ATURELLEMENT, on ne s'avisera point de douter, si l'on fait bien ce que c'est que de la Terre, si l'on distinguera bien cette matiere si commune d'avec toute autre, & particulièrement d'avec le Sable. Mais dès que l'on vient à considerer la formation des Pierres, par exemple, qui sont quelquefois un mélange visible de Terre & de Sable, ou, ce qui est encore plus important, si l'on travaille en Poterie, en Verrierie, en Porcelaine, tous Arts qui demandent une connoissance très exacte des matieres terreuses qu'on y employe, alors on s'apperçoit, ou qu'on ne fait pas assez, ou qu'il faut savoir mieux qu'on ne le fait d'ordinaire, quelle est la nature de la Terre, quels sont ses caracteres spécifiques, & si elle differe ou ne differe pas du Sable, qui entre dans les mêmes compositions; car suivant cela, on aura différentes vues, & les raisonnemens ou les operations se régleront différemment.

Il ne s'agit point ici de remonter jusqu'aux pré-

\* V. les M. p. 349.

premiers principes, jusqu'aux particules primordiales, dont la Terre peut être formée. Sans compter que l'entreprise seroit apparemment impossible, elle seroit inutile pour le dessein présent; il ne faut que des caracteres sensibles & palpables, une Physique plus grossiere suffira: mais malgré sa grossiereté, elle demandera encore assez de subtilité & de finesse.

Quand on n'y regarde pas de près, on peut croire, & plusieurs Physiciens même sont dans ce sentiment, ou à très peu près, que la Terre n'est que du Sable dont les grains sont plus fins. Mais M. de Reaumur établit des differences spécifiques entre ces deux matieres, & il n'est plus permis ni dans la Théorie, ni dans la Pratique, de ne compter que sur cette prétendue difference de la grosseur de leurs parties.

Par des expériences de M. de Reaumur très simples & très aisées à vérifier, la Terre s'imbibe d'eau de maniere à en être augmentée de volume, & réciproquement elle revient à son premier volume lorsqu'elle se desseche. Le Sable imbibé d'eau autant qu'il peut l'être n'augmente point son volume, & n'en perd rien en se dessechant: De-là il suit évidemment, que l'eau ne fait que remplir les interstices que les grains du Sable laissent entre eux; mais qu'outre cette fonction qu'elle a aussi par rapport aux interstices des grains de la Terre, elle pénètre dans l'intérieur de ces grains, les gonfle, & les étend. Si elle ne faisoit qu'y pénétrer, & y remplir de petites cavités, elle ne feroit rien de plus que

### 34 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

ce qu'elle faisoit dans les interstices, le volume total de la Terre n'en augmenteroit pas; il est nécessaire pour cette augmentation que les grains soient gonflés & étendus. La simple pénétration, soit dans les interstices, soit dans les cavités des grains de la Terre, n'a besoin que de la pesanteur, de la mobilité, & de la finesse des particules d'eau; mais la *distension* des grains a un besoin indispensable d'une autre force qui fasse entrer violemment dans les grains plus d'eau qu'ils n'en recevroient naturellement, & qui surmonte la résistance qu'ils apportent à cette distension. Quelle est cette force? il seroit bien difficile de le dire. C'est sans doute celle qui fait que des Cordes imbibées d'eau, venant à se raccourcir parce qu'elles se gonflent, élèvent des poids énormes; c'est celle qui fait que des Coins de bois bien sec entrés de force dans une Roche, la fendent & en détachent de grosses Meules de Moulin, lorsqu'ils se gonflent par l'eau dont ils sont abreuvés. Ces effets de l'eau, beaucoup plus étonnans que celui dont il s'agit ici, nous apprennent seulement, qu'appliquée d'une certaine manière elle a une force prodigieuse: l'existence de la force est prouvée de reste, mais sa nature demeure toujours inconnue.

Le Sable, quelque broyé qu'il puisse être, n'en est pas plus ouvert à l'eau, il ne la laisse entrer que dans les interstices de ses grains, & jamais dans leur intérieur, si ce n'est peut-être dans leurs petites cavités; mais alors même l'eau ne les étend pas, puisque le volume total du Sable ne reçoit ni augmentation  
par.

par l'introduction de l'eau, ni diminution par la sortie, ou par le dessèchement. La Terre est donc une espece de corps spongieux, dont les particules sont flexibles & capables d'extension; celles du Sable au contraire en sont incapables par leur roideur.

Si l'on veut distribuer les Corps en certaines Classes selon leur pénétrabilité par l'eau, on aura trois Classes; la 1<sup>re</sup> de corps absolument impénétrables à l'eau, tels que le Verre, l'Argent, l'Or; la 2<sup>de</sup> de corps peu pénétrables, tels que les Cailloux & les Crystaux, qui ne le sont que quand ils n'ont pas encore été assez longtems exposés à l'air, & endurcis par son action; la 3<sup>me</sup> de corps absolument pénétrables, tels que les bois, les peaux seches des Animaux, &c. le Sable se rangera dans la 1<sup>re</sup> Classe, & la Terre dans la 3<sup>me</sup>; & par-là on voit presque à l'œil que ce sont deux matieres fort differentes.

Elles le sont encore par un autre endroit, qui n'est pas moins marqué, ni moins décisif. La Terre abbeuvée d'eau est ductile, elle prend telle forme que l'on veut, & on le voit tous les jours par l'Art de la Poterie; cette qualité répond à la malléabilité des Métaux, & apparemment n'est au fond que la même. Elle ne se trouve point dans le Sable, ses parties sont trop roides, & trop inflexibles; & sans doute cela tient à ce qu'on a déjà vu, qu'il n'est pas spongieux comme la Terre.

Plus la Terre est grasse, plus elle est ductile; mais elle est plus ou moins grasse, ou par elle-même, par le plus ou le moins qu'elle

le contient d'une certaine onctuosité, ou par la différente quantité de Sable avec lequel elle est mêlée. Le Sable la rend toujours plus maigre.

On pourroit penser que la ductilité qui se trouve dans la Terre, & non dans le Sable, vient de ce que les grains de la Terre sont plus fins, ainsi qu'ils le paroissent ordinairement, car cette finesse contribue certainement à la ductilité, qui consiste en ce que les petites parties glissent aisément les unes sur les autres sans perdre leur liaison, ou en prenant des liaisons nouvelles; mais M. de Reaumur a fait des expériences qui détruisent entièrement cette idée.

Qu'avec de la Terre mêlée de Sable, comme elle l'est toujours, & une quantité suffisante d'eau, on fasse une eau bourbeuse, qu'on laissera reposer dans un Vaisseau; le Sable le plus grossier se précipitera au fond en un certain tems, & laissera la Terre leurnager, parce qu'il est spécifiquement plus pesant qu'elle. Sur ce principe de la différence de pesanteur, il est visible que par cette opération réitérée, par différentes lotions successives, on aura enfin le Sable & la Terre aussi séparés, aussi purs chacun qu'il soit possible. Ce Sable bien pur, on le broye extrêmement fin, on réduit de même en poudre la Terre pure, & l'on voit que ces deux poudres mêlées ensemble & mises dans l'eau s'y soutiennent également. Il faut donc que les particules de l'une & de l'autre soient d'une petiteffe à trouver de la part de l'eau une égale résistance à leur descente, c'est-à-dire, qu'el-

qu'elles soient d'une égale finesse. Il faut même à la rigueur que celle des particules de Sable soit la plus grande, car elles sont spécifiquement plus pesantes que celles de Terre, & elles descendroient plutôt qu'elles, ou sans elles, si elles n'avoient une plus grande surface en même raison qu'elles ont plus de pesanteur; or pour avoir une plus grande surface en raison de la pesanteur, elle doivent être plus petites, comme le savent les Géomètres. Cependant une pâte faite de cette même poudre de Sable ne sera point ductile, & celle de la poudre de Terre le sera. La ductilité de la Terre lui vient donc d'une qualité plus intrinsèque que la finesse de ses grains, qui n'appartiendroit qu'à des parties intégrantes; & par conséquent elle est propre à être un caractère spécifique qui distingue la Terre d'avec le Sable.

La ductilité de la Terre tient à ce qu'elle est spongieuse. Ses grains non-seulement pénétrés & amollis par l'eau, mais gonflés & étendus, vont à la rencontre les uns des autres à cause de cette nouvelle extension, prennent aisément à cause de leur mollesse les figures nécessaires pour s'ajuster exactement ensemble, & sont en état par la même cause de perdre aisément ces figures pour en prendre d'autres. Quand la Terre, dont on avoit fait une pâte en l'abbeuvant d'eau, est desséchée, elle en est plus dure, & mieux liée, parce que les nouveaux engrenemens de particules que l'eau y avoit produits subsistent même après l'évaporation. Il est clair que ce seroit le contraire de tout cela pour du Sable.



qu'on auroit traité comme la Terre.

La pénétrabilité de la Terre par l'eau, est ce qui rend la Terre la plus parfaite impénétrable à l'eau jusqu'à un certain point. Cette Terre la plus parfaite est la Glaise, qui est moins mêlée de Sable, plus pure qu'aucune autre, & tout le monde fait que l'eau ne passe point au travers, si ce n'est à une très petite épaisseur. C'est que l'eau qui en a pénétré une première couche, & l'a pénétrée d'autant mieux qu'elle n'y a trouvé qu'une pure Terre, en a tellement gonflé tous les grains, & si également, qu'ils ne lui permettent plus de passer jusqu'à une seconde couche. Quelques-uns ont cru que l'eau entraînoit de la première couche dans la seconde des grains, qui lui fermoient ensuite le passage; mais M. de Réaumur oppose à ce sentiment, entre autres raisons, que la simple vapeur d'une eau chaude, qui ne peut être soupçonnée de déplacer des grains, fait le même effet sur la Glaise.

On pourroit imaginer sans choquer la vraie semblance, que la ductilité de la Terre viendroit de la figure de ses particules, qui seroient des lames bien polies, posées les unes sur les autres, unies par un attouchement immédiat, mais faciles à séparer faute d'engrenement. Cette disposition si favorable ne peut pourtant suffire ici, elle seroit bientôt troublée quand on viendrait à pétrir la pâte de Terre, & à changer sa forme, & les lames prendroient elles-mêmes les arrangemens les moins réguliers & les plus bizarres. De plus, les Talcs & les Gypses sont certainement for-

formés par lames, & on trouve qu'ils le sont tant que leur division peut aller, ce qui donne un juste sujet de croire que cette disposition s'étend jusqu'à leurs petites particules. Cependant qu'on les réduise en poudre fort fine, & qu'on en fasse des pâtes bien humectées d'eau, ces pâtes n'auront point de ductilité : c'est donc une qualité attachée, non à la figure précisément, ou à la finesse, ou à l'arrangement, mais à la souplesse des parties.

Les Sels concrets, tels que l'Alun, le Vitriol, le Borax, la Soude, &c. quoique réduits en une poudre si fine qu'elle se soutient dans l'eau, tandis que celle de la Terre ne s'y soutient pas, ne sont jamais, non plus que le Sable, ou les Gypses, une pâte ductile.

M. de Reaumur fait déjà appercevoir quelques usages de sa Théorie. Elle entrera dans le Système de la formation des Pierres qu'il a ébauché en 1721, ainsi que nous l'avons dit \*. Les caractères de la Terre, qui viennent d'être établis, font reconnoître que comme il y a certaines Pierres, telles que le Grès, qui ne sont que du Sable pur, lié par la matière cristalline ou pierreuse que M. de Reaumur a supposée, il y en a d'autres où cette même matière a lié de la Terre pure, car elle se manifeste, & se rend presque visible par les expériences faciles que l'on fait sur la ductilité, & sur son renflement quand elle est bien humectée, ou son raccourcissement quand elle se dessèche. Les Cailloux

sont

\* *Pl. 1. & suiv.*

font, selon M. de Reaumur, des Pierres pétrifiées une seconde fois; ces Pierres, qui auront eu de la Terre, n'en ont plus étant Cailloux, du moins la Terre y a perdu les caracteres qui la rendoient reconnoissable. Cette espece de métamorphose est digne d'attention. Apparemment la matière, en s'insinuant simplement entre les grains d'une Terre, l'avoit rendue Pierre, & ensuite elle la rend Caillou en pénétrant jusque dans l'intérieur des grains.

L'Art de la Poterie confirme la Théorie présente. On fait combien les Vases faits d'une pâte de Terre sont sujets à se fendre, & à se gercer, & combien il faut avoir d'attention à les faire sécher peu à peu & par degrés, pour prévenir cet accident. On le prévient aussi en mêlant avec la Terre une certaine quantité de Sable, qui n'empêche pas la ductilité nécessaire. Il saute aux yeux, que la raison de cette pratique est que le Sable ne se renfle ni ne se raccourcit comme la Terre. Ce qui rend raison des pratiques aveugles des Arts, ce qui les éclaire, doit aussi en corriger de vicieuses, ou en faire naître de plus parfaites.

Nous avons rapporté en 1726\*, 1727 † & 1728 ‡, toutes les nouvelles vues de M. Couplet sur les Revêtemens, ou les Murs, qui ont des Terres à soutenir. Quoique la Géométrie ait dominé dans ces recherches, la Physique y est entrée autant, à ce qu'il semble, qu'elle le pouvoit, surtout par la seconde

\* p. 76. & suiv. † p. 183. & suiv. ‡ p. 143. & suiv.

de hypothese de M. Couplet ; mais la Théorie de M. de Reaumur offre une considération nouvelle très importante, & qui a échappé à tous ceux par qui ce sujet a été traité.

Des Terres coupées à plomb s'éboulent si peu, qu'à peine s'en détache-t-il quelques hottées en tout un an; & même cette petite quantité seroit encore plus petite, si les premières parcelles avoient été soutenues, & ne fussent pas tombées; car ce n'est ordinairement que leur chute, qui a entraîné celle des secondes. Un Mur n'a donc pas beaucoup de peine à soutenir ces Terres, si on n'y considère que l'effort qu'elles font pour s'ébouler: mais elles en ont un beaucoup plus grand, & très violent, c'est celui qu'elles font pour s'étendre, lorsqu'elles sont bien imbibées d'eau, & c'est à quoi le Mur de Revêtement doit s'opposer.

Il est vrai que cette tendance des Terres à s'étendre, doit agir en tout sens, verticalement aussi-bien qu'horizontalement, & que le Mur ne s'oppose qu'à l'action horizontale; mais il faut observer que la tendance verticale n'ayant pas la liberté d'agir, du moins dans toutes les couches inférieures de Terre pressées par le poids des supérieures, toute la tendance verticale se tourne en horizontale, tant que la difficulté de soulever les couches supérieures est plus grande que celle de forcer le Mur; & cela peut aller, & va effectivement fort loin. M. de Reaumur a fait une Expérience, d'où il résulte qu'une Terre qui a très peu de hauteur, ne laisse pas de s'étendre beaucoup davantage dans le  
sens.

sens horizontal, & que la force qu'elle a pour s'étendre en ce sens-là est beaucoup plus grande que tout son poids, & par conséquent que la force dont elle auroit besoin pour s'étendre autant dans le sens vertical.

Plus les Terres auront de facilité à s'imbi-ber d'eau, plus elles auront de pousse contre un Mur de Revêtement: des Sables n'en auroient aucune à cet égard; & par cette raison, M. de Reaumur propose pour remède à l'inconvénient dont il s'agit, de mêler exprès des Gravois dans les Terres qui ne seroient pas naturellement assez sablonneuses. Non-seulement les Gravois ou les Sables ne s'imbi-beront pas d'eau, mais ils laisseront des interstices qui seront des especes de retraites ménagées à la Terre qui se renflera, moyen-nant quoi elle n'agira pas contre le Mur.

Pour un examen parfait de la nature de la Terre, les deux caractères que nous avons exposés jusqu'ici, ne suffiroient pas, quoiqu'ils puissent passer pour les principaux. M. de Reaumur en trouve plusieurs autres qui distingueront les Terres entre elles, & dont il ne donne encore qu'une espece de dénombrement, se réservant à les considérer plus en détail.

Les Terres different par les couleurs, soit celles qu'elles ont naturellement, soit celles qu'elles prennent au feu.

Les unes se vitrifient, les autres se calcinent, & cela en differens degrés.

Elles passent toutes pour être Alkalines, & les Acides agissent sur elles; mais fort différemment. Il y a des Terres qui reçoivent des plus foibles Acides une violente impres-  
sion,

sion, tandis que d'autres en reçoivent à peine une sensible des Acides les plus forts. Elles sont encore à cet égard fort différentes des Métaux, par le peu de tems qu'elles demeurent suspendues dans leurs Dissolvans. Cette matiere, peu examinée jusqu'à présent, promet de la nouveauté.

Encore une qualité des Terres, à laquelle on n'a pas fait d'attention, c'est leur odeur. Celle des Pluyes d'Été est fort connue, elle vient de la Terre qui n'a presque d'odeur que quand elle est humectée; tout au contraire de quelques autres matieres, comme les Cheveux, la Corne, &c. qui n'en ont que par le feu.

On sent assez ce qu'on peut attendre des recherches qui se feront sur toutes ces qualités des Terres, si exposées à tout le monde pour la plupart, & si peu observées. Leurs combinaisons feront naître une distribution générale des Terres en Classes, Genres & Espèces, pareille à celle qui a paru si nécessaire en Botanique, & dont s'occupe depuis si longtems. Ces sortes d'Ordres, ou d'Ordonnances, si l'on veut, ne sont, à la vérité, que des productions de l'Esprit humain; mais ils nous aident à embrasser mieux tout ce que la Nature ne nous a donné que pêle-mêle & en confusion; quelquefois même ils donnent lieu de découvrir des causes générales, & de prévoir avec vraisemblance des faits particuliers.

Nous

Nous renvoyons entierement aux Mémoires

\* La Comparaison des Observations faites à Paris & à Aix.

† L'Ecrit de M. de Reaumur sur la Méchanique avec laquelle certains Insectes roulent des feuilles.

‡ Et les Observations Météorologiques de cette année 1730. par M. Maraldi.

## A N A T O M I E.

### *SUR LE CRYSTALLIN †.*

MET PETIT le Médecin, qui, comme on l'a vu dans plusieurs des Volumes précédens, s'est attaché particulièrement à l'Oeil, est entré dans des détails beaucoup plus grands qu'il n'avoit encore fait sur le Crystallin, une des principales parties d'où dépend la perfection de la Vision, & qui de plus est le siege de la Cataracte.

Il ne s'est pas borné aux Crystallins humains de tous âges, il a étendu ses recherches jusqu'à ceux de tous les Quadrupedes, Oiseaux, Poissons, qu'il a pu recouvrer. Il en

\* V. les M. p. 1. † V. les M. p. 79.

‡ V. les M. p. 318. § V. les M. p. 4. & 622.

en a confideré la differente confistence, la couleur, la figure, les dimensions, la pesanteur. Voicice qui résulte de ses observations.

Dans les Serpens & les Poissons; le Crystallin est presque sphérique.

Dans tous les autres Animaux, j'entends ceux que M. Petit a vus, il est Lenticulaire, comme on fait, ou formé de deux Segmens de Sphere posés l'un contre l'autre, & qui ont une circonference circulaire commune. Les deux Spheres, dont ces Segmens sont portions, ne sont que très rarement égales. La Sphere à laquelle appartient le Segment qui fait la surface antérieure du Crystallin, est presque toujours la plus grande des deux; & par conséquent la surface antérieure du Crystallin est moins convexe, ou moins courbe que la postérieure, & fait de moindres réfractions. M. Petit a eu la patience de mesurer dans un grand nombre de Sujets de différentes especes ces deux convexités, le diametre de la circonference commune, ou la largeur du Crystallin, la longueur de la ligne menée du sommet d'un Segmet au sommet de l'autre, ce qui est l'épaisseur ou l'axe du Crystallin. Ces petites mesures sont les plus difficiles à prendre, & les plus ennuyeuses par leur petitesse même. Pour ces dimensions, & pour les pesanteurs des Crystallins, M. Petit a fait une Table de 26 Crystallins humains de differens âges, & une autre Table de 36 Crystallins de Bœufs, dont il est aisé d'avoir une assez grande quantité.

La pesanteur du Crystallin humain a été trouvée de 1 grain  $\frac{1}{4}$  dans un Fœtus de 7 mois,  
&



Le Cryſtallin de l'Homme peut perdre juſqu'aux  $\frac{1}{2}$  de ſon poids. Plusieurs Cryſtallins de jeunes Animaux en perdent autant.

La ſtructure du Cryſtallin par couches, ou envelopes concentriques poſées les unes ſur les autres, ſe confirme telle qu'on la conçoit ordinairement. M. Petit ſ'en eſt aſſuré tant par des coupes adroites du Scalpel, que par des expériences de Cryſtallins mis dans pluſieurs liqueurs différentes, & principalement dans des Eſprits acides, où ils ſe ſont fendus, tantôt en Côtes de Melon, tantôt du centre à la circonférence, ou de la circonférence au centre, mais toujours d'une manière à donner lieu de juger de la conſtruction totale.

M. Petit ſ'eſt fort étendu ſur la Capſule du Cryſtallin, à laquelle il a donné un Mémoire entier. C'eſt une Membrane qui enveloppe tout le Cryſtallin, mais une Membrane ſi déliée que d'habiles Anatomistes en ont nié l'exiſtence, ou du moins en ont douté. Elle n'eſt effectivement guere moins fine dans l'Homme, qu'une toile d'Araignée. Auſſi quelques-uns l'appellent-ils *Arachnoïde*. Elle eſt une fois plus épaiſſe dans le Bœuf, que dans l'Homme, & encore plus dans le Cheval. Elle ſeroit par conſéquent moins difficile à démontrer dans ces Animaux, & ce ſeroit une aſſez forte préſomption qu'elle devroit ſe trouver dans l'Homme; mais on l'y démontre auſſi, & même ſans injection, quoique ce fût d'ailleurs une choſe aſſez ſurprenante, qu'une Membrane ſi fine pût être injectée. Elle peut l'être cependant. Elle reçoit

voit quelquefois aussi une Injection naturelle, c'est-à-dire, qu'il s'y fait une inflammation, & que les Vaisseaux plus remplis de Sang, ou de la liqueur qu'ils portent, deviennent visibles, & qu'on apperçoit leur distribution, & leurs ramifications.

Le Crystillin de l'Homme revêtu de sa Membrane ou Capsule paroît moins transparent à sa partie antérieure qu'à la postérieure; mais s'il est dépouillé, sa transparence est égale des deux côtés.

Le ligament ciliaire se termine & s'attache à la partie antérieure de la Capsule par des fibres qu'il y jette, & par les Vaisseaux qu'il lui fournit. Ces vaisseaux ne sont que des Lymphatiques. Quand il paroît du Sang dans cette Membrane, c'est par quelque accident particulier, comme lorsque dans un accouchement difficile la tête de l'Enfant a été violemment comprimée au passage, & que le Sang y a été obligé de s'insinuer dans des Canaux qui ne lui étoient pas destinés.

La Capsule se nourrit donc de cette Lymphe, qui lui est apportée par les Vaisseaux qu'elle reçoit du Ligament Ciliaire. On voit qu'il s'en épanche une partie dans la cavité de la Capsule, entre cette Membrane & le Crystillin.

M. Petit l'a toujours trouvée transparente, tant dans l'Homme que dans les Animaux, même dans les Sujets qui avoient des Cataractes. La Cornée & la Membrane Hyaloïde trempées dans l'eau bouillante, dans les Esprits acides, &c. y perdent leur transparence; la Membrane Crystilline y conser-

ve la sienne, elle ne la perd que dans l'Esprit de Nitre, encore s'y dissout-elle le plus souvent, plutôt que de la perdre. Les CrySTALLINS deviennent opaques dans des Solutions de plusieurs sortes de Sels, & leurs Capsules ne le deviennent pas.

Il seroit fort naturel que de la Capsule, il partît des Vaisseaux, qui entraissent dans le CrySTALLIN, c'est ainsi que toutes les parties du Corps de l'Animal sont liées avec leurs voisines; mais M. Petit s'est fort assuré qu'il n'en étoit pas de même ici. Le CrySTALLIN est la seule parfaitement isolée à l'égard de toute autre, & en effet sa transparence le demande; elle seroit au moins troublée & diminuée, si des Vaisseaux venoient serpenter dans sa substance, & traverser de tous côtés ces lames ou ces couches qui le composent, & dont le tissu a besoin d'être si homogène.

Comment donc se nourrit le CrySTALLIN, s'il n'a point de Vaisseaux? Il s'imbibe de cette Lymphe épanchée dans la Capsule, & s'en nourrit comme font plusieurs autres Corps qui croissent sans *intussusception*. Peut-être même ne se laisse-t-il pénétrer que par la partie la plus sereuse de cette liqueur, tandis que l'autre partie plus visqueuse reste extérieure, & prenant peu à peu une certaine consistance, se moule entre la Capsule & le CrySTALLIN dont elle devient la première & la plus grande couche pour un tems, car ensuite elle sera recouverte par une autre.

Si cette Lymphe vient à manquer, le CrySTALLIN devient dur & opaque, & peut aisément se réduire en poudre, ainsi que M. Petit l'a

l'a observé. La Capsule qui sera le Réservoir des Sucs nourriciers du Crystillin aura donc un usage assez important ; sans compter celui de l'arrêter & de le tenir en état dans le Châton de l'Humeur Vitrée, où il est encaissé, comme un Diamant dans le sien.

Cette liqueur est en si petite quantité dans l'Homme, qu'elle s'est dérobée aux expériences que M. Petit en eût voulu faire. Il faudroit avoir 18 ou 20 Yeux à la fois ; & tous bien pourvus de la Lymphe, car ils ne le sont pas tous ; & il est bien visible que cela ne seroit pas aisé. Du moins il a fait quelques épreuves sur la Lymphe Crystilline des Bœufs, qui est en plus grande quantité, & d'ailleurs plus visqueuse, & plus propre à se décomposer ; mais il n'en a encore pu tirer de conséquences bien précises.

Il en tire une assez importante de ce qu'il a découvert sur la Capsule. On croit encore qu'il peut y avoir des Cataractes membraneuses, qui seront des Membranes épaissies, & devenues opaques ; on en a vu \*. Mais M. Petit juge qu'on a été trompé par une fausse apparence. Ces Cataractes sont la Capsule épaissie, à la vérité, mais non pas dans sa propre substance. Le Crystillin, faute de nourriture suffisante, s'est desséché, & en se desséchant s'est collé à la Capsule, dont il n'étoit plus séparé par la Lymphe. L'épaisseur qu'on trouve de plus à la Capsule, & qui cause son opacité, lui vient de quelques particules étrangères, qui appartenoient au Cryst-

tal-

\* V. l'Hist. de 1722. p. 27. & suiv.

tallin. Qu'on les enleve par le moyen d'un peu d'eau, la Capsule redevient transparente. Combien de choses à observer sur l'Oeil seul ! combien en avons-nous déjà dit, dont de grands Oculistes, & qui ont eu de grands succès, n'ont eu peut-être guere de connoissance !



## DIVERSES OBSERVATIONS

### ANATOMIQUES.

#### I.

**M.** DU VIVIER, Chirurgien Major de l'Hôpital de Thionville, envoya à M. Morand un Rein unique, tel qu'il l'avoit trouvé à l'ouverture du Corps d'un Suisse. On ne laissoit pas de conjecturer par une échancrure de la surface, que ce Rein avoit été formé de la jonction des deux : mais comme M. du Vivier avoit trouvé le Foye du Sujet extrêmement gros, il avoit lieu de croire que des deux Reins c'étoit le droit qui ayant été fort pressé & fort incommodé, s'étoit uni à l'autre, dont l'extension naturelle n'avoit point été gênée ; & en effet ce Rein unique étoit beaucoup plus gros dans toute sa partie gauche, & tous les Vaisseaux, qui eussent appartenu aux deux Reins, & qu'il avoit, quoique dans une position un peu différente de l'ordinaire, étoient aussi plus gros de ce même côté-là. M. Morand le dissequa en pleine Académie, & on le trouva effectivement unique en dedans, comme il le paroissoit en dehors.

Il n'est point dit que le Suïſſe eût aucune incommodité qui ſe rapportât à cette conformation ſingulière.

Elle ne l'eſt pas cependant à tel point, qu'il n'y en ait déjà des exemples connus. M. Morand en cita un pris de la Centurie 11<sup>me</sup> Hiſt. 77. des *Hiſtoires Anatomiques* de Th. Bartholin. Lui-même en fit voir un pareil, & M. du Vivier en alleguoit auſſi un qu'il avoit vu autrefois. On peut aiſément juger qu'il y avoit des différences dans le nombre & dans la diſtribution des Vaiſſeaux.

## II.

Un jeune Gentilhomme de Languedoc âgé de 13 à 14 ans, qui après s'être fort échauffé, s'étoit mis les pieds dans de l'eau froide, en eut une fièvre ordinaire, dont la ſuite fut très fâcheuſe. C'étoit une tumeur très conſidérable, qui occupoit le milieu de la région Epigaſtrique, & preſque les deux Hypochondres, au haut de laquelle on remarquoit le Cartilage Xiphôide relevé & pouſſé en dehors de deux pouces, & qui étoit terminée dans le bas à un pouce au-deſſus de l'Ombilic. Comme les Cataplaſmes, les Remedes émolliens, ſpiritueux, &c. avoient été inutiles, & que le Malade attaqué d'une fièvre lente tomboit dans un deſſechement & dans un dépériſſement très menaçant, on réſolut à Montpellier d'ouvrir la tumeur, & ce fut M. Soullier, Ecuyer, Maître Chirurgien & Anatomiſte Royal en l'Univerſité de Médecine de cette Ville, qui fit l'opération. Il

trouva le Foye confiderablement abfcédé dans fa partie antérieure & convexe: il s'y étoit fait un trou qui auroit pu recevoir la moitié d'un Oeuf de Poule, & il en fortoit dans les Panfemens de la matiere fanguinolente très épaiſſe, quelquefois jaunâtre, amere & inflammable, qui étoit de véritable Bile, & toujours des flocons de la propre ſubſtance du Foye, où l'on pouvoit appercevoir de petits bouts de Vaiſſeaux, les uns Sanguins, les autres Biliaires.

La principale difficulté étoit de bien vuider la matiere de l'Abſcès, d'en empêcher le ſéjour dans le Foye, & le reflux dans le Sang. Pour cela M. Soullier imagina une Canule d'argent particuliere, émouſſée par le bout qui entroit dans le Foye, de peur qu'elle ne le bleſſât, mais percée de pluſieurs ouvertures laterales, qui recevoient la matiere nuifible. De-là il étoit aifé de la jeter en dehors; & on avoit eu même la précaution de faire qu'elle ne pût s'épancher que ſur une plaque de plomb appliquée à la Playe, car autrement elle eût cauſé des excoriations à la Peau. Le tout réuſſit ſi bien, que l'on vit la fièvre du Malade diminuer de jour en jour, & ſon embonpoint naturel revenir peu à peu. Sa playe ſe cicatriſa en très peu de tems.

M. Soullier a cru devoir prévenir une objection de Théorie qu'on pourroit faire. Presque tous les Anatomiftes tiennent que la Bile contenue dans les Vaiſſeaux du Foye eſt toujours inſipide, & à peine colorée, & qu'il n'y a que celle de la Véſicule qui ſoit jaune & amere. Cependant on a vu ici de la Bile ainſi

ainfi conditionnée, qui ne sortoit pas de la Vésicule. Mais il est fort naturel que les qualités qu'elle y auroit prises, elle les ait prises par son séjour dans la substance du Foye.

La Relation envoyée à l'Académie par M. Soullier, a été signée de M<sup>rs</sup> Chicoyneau & Bourraigne, fameux Médecins de Montpellier.

### III.

Un homme de 28 ans employé à Brest dans les Fermes du Roi, s'étoit plaint pendant 10 mois d'une douleur de poitrine, qui lui ôtoit la faculté de respirer, d'un vomissement qui lui prenoit par paroxysmes, & d'une pesanteur dans le bas-ventre. Il mourut après avoir essayé inutilement tous les remèdes ordinaires, & il fut ouvert par M. Cadran Chirurgien des Vaisseaux du Roi à Brest, qui en a envoyé la Relation à M. du Fay. On lui trouva plus de causes de tous ses maux qu'il n'en falloit, les Poumons flétris & très secs, la Pleure très enflammée, les Intestins gangrenés, la Vessie raccornie & vuide, la Vésicule du Fiel pareillement toute vuide: mais on lui trouva aussi ce qu'on n'eût pas soupçonné, & ce qui n'avoit rapport à aucun des maux dont il se plaignoit. Il n'avoit jamais rendu de sable, jamais eu de douleurs Néphrétiques, ni de suppression d'urine; cependant son Rein droit, devenu extraordinairement gros, d'une substance cartilagineuse, & si dure qu'on eut de la peine à le couper, renfermoit une grosse Pierre du poids de 6 On-



ces  $\frac{1}{2}$ . Le corps de la Pierre, formé à l'ordinaire par couches, remplissoit la capacité du Bassin, & par son bout inférieur enfiloit la route de l'Uretere; mais il partoit de ce corps un grand nombre de branches d'une figure extrêmement irréguliere, dont les unes se distribuoient dans les Cellules des Vaisseaux Excrétoires, & les autres ne s'attachoient à rien; elles n'étoient toutes que des graviers entassez, & envelopés d'une lame osseuse, tirant sur la couleur d'un Corail blanc. Le Rein gauche étoit dénué de toute substance, n'ayant ses Cellules remplies que d'une liqueur verdâtre. Il est presque inconcevable que de semblables Reins ne se soient pas fait sentir, aussi-bien que toutes ces autres parties qui n'étoient pas plus mal affectées.

## I V.

M. du Fay, Médecin du Port de l'Orient, a écrit à M. Geoffroy, que dans le cours de deux ans, il étoit sorti à un Charpentier de ce Port, âgé de 84 ans, 4 Dents, 2 Incisives, & 2 Canines.

## V.

M Bouillet, dont nous avons déjà parlé plusieurs fois, Secrétaire de l'Académie de Bésiers, & Correspondant de celle de Paris, a écrit à M. de Mairan, que les Vers ronds & longs, qui sont toujours assez communs dans le país où il est, l'ont été beaucoup davantage en 1730. Des personnes de tout âge, de tout sexe, de tout temperament, en ont été  
at-

attaquées & en ont rendu même quelquefois par la bouche. Quelques-uns en sont morts, malgré tous les secours de la Médecine. La femme d'un Artisan de Béziers a été celle qui a eu la maladie la plus considérable & la plus opiniâtre. Elle a jetté dans l'espace de 25 jours 21 ou 22 Vers, dont 6 sont venus par la bouche, 5 vivans & 1 mort, & les autres par les selles, vivans la plupart, mais qui mouroient peu de tems après. Ce n'étoit qu'à force de remèdes les plus puissans redoublés qu'on les arrachoit de son corps, & le plus grand nombre n'en avoit pas été tué.

Cette femme avoit à la vérité usé de quelques mauvais alimens, mais ordinaires dans le pays, & aux gens de son état; & d'autres personnes, qui n'en avoient pas usé, & qui faisoient même des excès de vin, ne laissoient pas de tomber dans cette maladie. Cela a fait penser à M. Bouillet que la principale cause de cette abondante génération de Vers avoit été la grande douceur de l'Hiver de 1730, qui avoit fait éclore leurs Oeufs en plus grande quantité, & plus facilement, si cependant ces Vers sont Ovipares.

Car M. Bouillet lui-même rapporte que dans un Ver de cette espèce, plus gros que les autres, on a vu clairement de petits Vers vivans monter & descendre. Ce fait, qui n'a été vu que de la Mere du Malade, dont le Ver étoit sorti, & qui fut dit aussi-tôt à un Maître Apoticaire de Béziers, ne paroît pas assez attesté, s'il n'y en avoit deux à peu près semblables, l'un dans une Lettre insérée dans les *Actes* de Th. Bartholin tom.

3. c. 58, l'autre dans la nouvelle Edition du Traité de la *Génération des Vers*, p. 39.

## V I.

Le même M. Bouillet a vu un Foye de Coq, pesant un peu plus d'une livre. Il n'avoit rien d'extraordinaire, que sa grosseur monstrueuse. Le Coq avoit été tué par hazard d'un coup de pierre, & on ne lui avoit remarqué aucune forte d'indisposition.

## V I I.

M. Garfin, Correspondant de l'Académie, & qui a été employé par la Compagnie Hollandoise des Indes Orientales en qualité de Chirurgien, a vu dans l'Estomac parfaitement vuide d'une Bonite que l'on prit dans la Mer au-delà de l'Equateur, un Ver qui y étoit assez fortement attaché, & dont on a joint ici la figure au naturel, pour tenir lieu d'une plus ample description. Le corps de ce petit Animal est divisé en deux parties peu inégales par une bulle assez grosse & bien marquée, placée comme sous le ventre, & qui peut s'enfler & se defenfler alternativement. Quand cette bulle s'enfle elle s'attache par un orifice qu'elle a, & qui se dilate, à quelque corps tel qu'étoit l'estomac de la Bonite; & alors ne contenant qu'un air très raréfié, & pressée de toutes parts également par l'air plus dense qui l'environne, elle est, à la maniere d'une Ventouse, fortement appliquée à l'endroit qu'elle a saisi. C'est-là le point fixe sur le-

lequel se font les deux mouvemens de l'Animal. Par l'un sa bulle étant arrêtée à demeure, il promene sur ce centre en tous sens la partie antérieure de son corps qui est flexible, s'allonge & se raccourcit, & même se met en arc; & sa bouche ou trompe, qui est à l'extrémité de cette partie antérieure, va sucer successivement tout ce qui se trouve dans l'espace assez grand que ce mouvement si varié peut parcourir. C'est à cause de cette succion que M. Garfin nommé ce Ver *Hirudinella marina*, petite Sangsue de Mer. Par l'autre mouvement, qui est proprement le progressif, l'Insecte ayant arrêté sa bulle à un endroit, arrête sa bouche à un autre le plus éloigné qu'il peut, & ensuite accourcissant sa partie antérieure, & desinflant sa bulle qui lâche ce qu'elle avoit saisi, il avance vers le lieu où est sa bouche, en trainant seulement sa partie postérieure, qui ne paroît point contribuer par elle-même à la progression.

Cet Insecte, tiré de l'Estomac de la Bonité, ne vécut qu'environ deux heures. Exposé à l'air il étoit languissant, & reprenoit de la vivacité dans de l'eau de Mer. Il diminua sensiblement de volume pendant qu'il vivoit encore.



**M.** Domaingo Sorhaiz, Chirurgien de M<sup>rs</sup> les Ambassadeurs d'Espagne, a fait voir differens Bandages pour les Descentes Inguinales, pour celles de Matrice, pour les Exomphales, pour les incontinenances d'Urine, pour la Chute de l'Anus, pour la com-  
C 6 pres-

pression de l'Artere Cruale dans l'amputation de la Cuiffe; & l'Académie y a trouvé plusieurs choses particulieres à M. Sorhaiz, & qui marquent en lui bien du génie, soit pour inventer, soit pour perfectionner.



**N**ous renvoyons entierement aux Mémoires

\* L'Observation de M. Morand sur une altération singuliere du Crystallin, & del'Humour Vitree.

† L'Ecrit de M. Vinslou sur les Mouvements de la Tête, du Col, &c.

‡ Celui de M. Hunaud sur les Os du Crane de l'Homme.

\* V. les M. p. 467.

† V. les M. p. 492.

‡ V. les M. p. 777.

## C H I M I E.

### *SUR LES BOUILLONS DE VIANDE \*.*

**L**es Bouillons de Viande sont la nourriture ordinaire des Malades, & quand il faut leur mesurer les alimens fort juste, il est à propos de savoir quelle quantité d'aliment ces Bouillons contiennent. On le fait peut-être en gros, & par une espece d'estime; & cela suffit pour les cas qui ne sont pas de rigueur: mais dans ceux qui en sont, il seroit bon de le savoir avec précision; & en général, ce sera au moins une connoissance curieuse.

On a fait anciennement dans l'Académie quantité d'Analyses de différentes Viandes, mais ces Viandes étoient distillées crues au Bain-Marie; & en cet état, & par cette voye, il ne seroit pas étonnant qu'elles nous donnassent des principes differens ou en qualité, ou en quantité, de ceux qu'elles donnent à une eau où elles auront longtems bouilli, & jusqu'à faire, si l'on veut, un Consommé. C'est ce qu'on ne s'étoit point encore proposé, & ce que M. Geoffroy ajoute à ce qui s'étoit déjà fait.

Son procédé général peut se diviser en 4 parties, 1<sup>o</sup>. par la simple distillation au Bain-

Ma-

\* V. les M. p. 312.

Marie, & sans addition, il tire d'une certaine quantité, comme de 4 Onces d'une Viande crue, tout ce qui s'en peut tirer. 2°. Il fait bouillir 4 autres Onces de la même Viande autant & dans autant d'eaux qu'il faut pour en faire un Confommé ; c'est-à-dire, pour n'en pouvoir plus rien tirer ; après quoi il fait évaporer toutes les eaux où la Viande a bouilli, & il lui reste un Extrait aussi solide qu'il puisse l'être, qui contient tous les principes de la Viande, dégagés de flegme & d'humidité. 3°. Il analyse cet Extrait, & sépare ces principes autant qu'il est possible. 4°. Après cette Analyse il lui reste encore de l'Extrait une certaine quantité de fibres de la Viande très desséchées, & il les analyse aussi.

La 1<sup>re</sup> partie de l'opération est en quelque sorte détachée des trois autres, parce qu'elle n'a pas pour sujet la même portion de Viande, qui est le sujet des trois dernières. Elle est nécessaire pour déterminer combien il y a voit de flegme dans la portion de Viande qu'on a prise, ce que les autres parties de l'opération ne pourroient nullement déterminer.

Ce n'est pas cependant qu'on ait par-là tout le flegme, ni un flegme absolument pur. Il y en a quelque partie que le Bain-Marie n'a pas la force d'enlever, parce qu'elle est trop intimement mêlée dans le Mixte ; & ce qui s'enleve est accompagné de quelques Sels volatils, qui se découvrent par les épreuves Chimiques.

M. Geoffroy ayant pris 4 Onces de la meilleure chair de Bœuf, dont il avoit ôté la Graisse, les Os, les Cartilages ; les Tendons

dons & les Membranes, il en a tiré par la distillation au Bain-Marie 2 onces, 6 gros, 36 grains de flegme; ce qui marque que le flegme seul fait une partie considérable du tout, même sans compter ce qui n'a pu s'élever. Ensuite 4 onces de la même chair, cuites dans un vaisseau bien fermé, avec 18 chopines d'eau versées à différentes reprises, ont donné après l'ébullition & l'évaporation 1 gros 56 grains d'Extrait, & il est resté 6 gros 36 grains de fibres séchées.

Par l'Analyse de l'Extrait il est venu un Sel volatil en cristaux plats, formés comme ceux du Sel volatil de l'Urine, & qui paroît armoniacal. M. Geoffroy croit que c'est celui qui se sépare du Sang par les Urines après la nutrition, & qu'on peut le regarder comme le Sel essentiel de la Viande. Après le Sel volatil il est venu de l'Huile, & il est resté une Tête-morte ou Charbon très léger, en très petite quantité.

L'Analyse des fibres a donné à peu près les mêmes produits, dans le même ordre, & en doses un peu différentes.

Ce que nous appellons ici l'Extrait, contient toute la substance nourrissante de la Viande. Si 4 Onces de chair de Bœuf donnent 1 gros 56 grains de cet Extrait, une Livre de 16 Onces en donnera 7 gros 8 grains; & par conséquent si on prend un Consommé d'une Livre de Bœuf, on fait ce qu'on prend de nourriture solide. Mais comme les Bouillons se font de différentes Viandes, & le plus souvent mêlées, M. Geoffroy a aussi travaillé sur celles qu'on employe le plus ordinairement.

Dans



Dans 4 Onces de chair de Veau, il y a 18 grains de flegme de plus que dans le Bœuf, on en tire 46 grains d'Extrait de plus, & il reste 46 grains de moins de fibres desséchées. On auroit pu prévoir avant l'opération la première de ces différences, & même les deux autres; car le Veau qui se nourrit & croît, a besoin d'une plus grande quantité de Sucs que le Bœuf qui n'a qu'à se nourrir. Il est à présumer que parmi les Sucs du Veau, il y en a un plus grand nombre de propres à former des Os ou des Cartilages, que parmi ceux du Bœuf; & de-là M. Geoffroy tire cette conjecture, que les Boillons de Veau conviendront peut-être mieux aux Malades qui sont encore en âge de croître, ou qui sont tombés dans une grande maigreur. Si l'on ne va pas ordinairement jusqu'à ces sortes de subtilités de pratique, ce n'est pas qu'elles ne fussent utiles, c'est qu'on ne se donne pas la peine de les rechercher.

La chair de Mouton a été traitée de la même manière que les deux précédentes, & il en a résulté qu'elle contient plus de Sucs nourriciers, & de principes volatils. La chair de Poulet, celles de Chapon, de Perdrix, &c. ont subi aussi l'examen de M. Geoffroy, & il a fait des Tables des doses exactes des produits de toutes ses opérations. Par-là on est état de ne plus faire au hazard des mélanges de différentes Viandes, & de savoir précisément ce qu'on y donne, ou ce qu'on y prend de nourriture.

Il faut observer que les doses des Extraits marquées dans les Tables, sont les doses

ex-

extrêmes, c'est-à-dire, qu'elles supposent qu'on a tiré de la Viande tout ce qui s'en pouvoit tirer par l'ébullition: mais les Bouillons ordinaires ne vont pas jusque-là, & les Extraits qui en viendroient seroient moins forts. M. Geoffroy en les réduisant à ce pied ordinaire, trouve qu'on a encore beaucoup de tort de craindre, comme on fait communément, que les Bouillons ne nourrissent pas assez les Malades. La Médecine d'aujourd'hui tend assez à rétablir la Diete austere des Anciens; mais elle a bien de la peine à obtenir sur ce point une grande soumission pour l'Antiquité.



### *SUR UN GRAND NOMBRE DE PHOSPHORES NOUVEAUX. \**

**L**es Phosphores sont une des nouveautés les plus récentes, & en même tems les plus curieuses de la Physique moderne. D'un côté un Cordonnier de Boulogne en Italie, croyant tirer de l'Argent d'une Pierre qu'il avoit trouvée au bas du Mont Paterno, s'avisa de la calciner, & c'est-là le fameux Phosphore qu'on appelle la Pierre de Boulogne. D'un autre côté un Chimiste Allemand, qui esperoit trouver la Pierre Philosophale dans l'Urine humaine, n'y trouva qu'un second Phosphore, dont le secret eût péri avec lui, fr

si M. Kunkel, Chimiste de M. l'Electeur de Saxe, ne se fût mis à le chercher, & ne l'eût retrouvé à force de travail.

Ces deux Phosphores ont une difference très considerable. La Pierre de Boulogne, exposée simplement au jour, y prend de la lumiere, mais une lumiere foible, qui ne s'apperoit que quand la Pierre est ensuite transportée dans un lieu obscur. Elle ne peut mettre le feu à rien. Le Phosphore urinaire de Kunkel s'enflame par le seul attouchement de l'air froid ou chaud, de nuit comme de jour, & peut mettre le feu à des matieres fort combustibles. Aussi ce Phosphore s'appelle-t-il *brulant*.

Ce n'est pourtant pas que cette difference soit absolument essentielle, elle pourroit bien n'être que du plus au moins. Il y a toute apparence que dans la Pierre de Boulogne, aussi-bien que dans le Phosphore urinaire, il se fait une véritable inflammation, mais une inflammation de parties si déliées, qu'il n'en résulte que de la lumiere sans aucune chaleur. Les rayons du Soleil répandus dans l'air, lorsqu'ils sont couverts de nuages, suffisent pour allumer les Soufres très subtils de la Pierre de Boulogne, & n'auroient pas la force d'allumer des matieres tant soit peu plus grossieres, telles que les Soufres du Phosphore urinaire; mais ces mêmes Soufres ont été mis par les operations Chimiques dans une disposition si prochaine à s'enflammer, qu'il ne faut plus, pour ainsi dire, qu'un Soufflet qui excite la flamme, & ce Soufflet, c'est l'Air, au mouvement duquel  
on

on les expose. On peut s'en tenir là, sans aller jusqu'au petit Système que faisoit M. Homberg \*.

Malgré le fond de conformité qui est entre la Pierre de Boulogne & le Phosphore urinaire, ce seront toujours deux Phosphores differens, en ce que l'un ne fera que jeter de la lumiere dans l'obscurité, & que l'autre pourra mettre le feu à quelques matieres; on en pourra faire deux especes differentes, de Phosphores lumineux, c'est-à-dire simplement lumineux, & de Phosphores brulans; & on les mettra, si l'on veut, chacun à la tête de son espece, parce qu'ils y ont été découverts les premiers. Nous ne ferons point, du moins quant à présent, une troisieme espece de Phosphores tels que ceux dont il a été parlé en 1724 †, qui ne sont point Phosphores pour avoir été simplement exposés au jour ou à l'air, mais parce qu'ils ont emporté de la calcination un feu actuel, ce qui les réduit presque à n'être que des Charbons ardens.

La 2<sup>de</sup> espece de Phosphores a été la plus traitée. L'Urine, dont étoit fait celui de Kunkel, n'a pas manqué d'avertir les Chimistes qu'ils pouvoient tourner leurs vues & leurs recherches du côté des matieres animales: ils l'ont fait avec succès, & enfin M. Homberg trouva dans la plus abjecte de toutes ces matieres le plus beau des Phosphores brulans ‡. Feu M. Lémery le cadet étendit les

\* V. l'Hist. de 1712. p. 51. & suiv. † p. 83. & suiv.

‡ V. l'Hist. de 1710. p. 71. & suiv.

les découvertes de M. Homberg presque à toutes les matieres, non-seulement animales, mais végétales \*.

La 1<sup>re</sup> espece de Phosphores, celle des Phosphores lumineux, qui ne prennent de la lumiere qu'au jour, a été la plus négligée, peut-être parce qu'on n'a pas cru tirer aisément d'une matiere minerale, comme la Pierre de Boulogne, des principes assez vifs & assez actifs pour la propriété singuliere dont il s'agissoit. Le Phosphore de Balduinus, fait avec la Craye, étoit le seul que l'on connût de cette nature, car nous ne comptons point celui dont il a été parlé en 1728 †, fait à la vérité de matieres minerales, & même métalliques, mais qui est brulant, & non pas lumineux dans le sens que nous l'entendons.

Mais voici le nombre des Phosphores de la 1<sup>re</sup> espece, semblables à la Pierre de Boulogne, prodigieusement augmenté. M. du Fay, travaillant dans d'autres vues sur les Pierres fines, s'aperçut que la Topaze commune, qui s'employe en Médecine, ayant été calcinée, devenoit, quant aux effets, une vraie Pierre de Boulogne. Il suivit la route où cet heureux hazard l'avoit mis, il trouva que la Bélemnite ou Pierre de Lynx réussissoit encore mieux que la Topaze; & enfin de toutes ces sortes de Pierres, des Pierres à plâtre, ou Gypses, des Albâtres, des Pierres de taille & de Liais, de la Marne, des Bols, des Pierres à chaux, & des Marbres mêmes, il tira des Phosphores qui ayant été

ex-

\* V. l'Hist. de 1713. p. 24. & suiv. † p. 48.

exposés au jour pendant une Minute, lui-  
soient dans l'obscurité.

Ce n'a pas été la calcination seule qui a  
donné tous ces Phosphores, il a fallu dissou-  
dre par des Acides celles d'entre ces différen-  
tes matieres qui étoient les plus dures, &  
les plus compactes; & quand certaines matie-  
res l'ont été à certain point, comme les Cail-  
loux, le Sable de Riviere, les Jaspes, les  
Agathes, le Crystal de Roche, &c. il n'est  
point venu de Phosphores. Cependant M.  
du Fay n'en desespere pas encore tout-à-fait,  
ni même des Métaux; d'autres operations  
pourront réussir. L'Histoire des Découver-  
tes fournit quantité d'exemples qui encour-  
agent.

On voit assez que ces Phosphores faits de  
différentes matieres, & quelquefois par des  
procedés differens, doivent avoir entre eux  
un nombre proportionné de différences, &  
par conséquent très grand. Leur lumiere est  
plus ou moins vive, elle dure plus ou moins  
à chaque fois qu'on les met dans l'obscurité,  
parce qu'il se consume toujours une certaine  
portion de leurs Soufres; ils la perdent à la  
fin. en un tems total plus ou moins long,  
supposé que la propriété ait été également  
exercée. Quand ils l'ont perdue, on la leur  
rend en recommençant sur eux l'operation qui  
la leur avoit donnée; car, & on le voit aisé-  
ment, ce ne sont que les Soufres de la sur-  
face qui s'enflâment, & se consomment, &  
une nouvelle operation fait une autre surfa-  
ce. Mais cela ne va pas à l'infini, & le nom-  
bre

bre de fois qu'on peut renouveler differens Phosphores, doit être different.

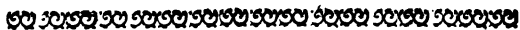
Ils ont bien des choses communes, bien entendu que c'est toujours avec des variétés. Ils prennent de la lumiere au travers du Verre & de l'eau; ils n'en prennent presque point de la Lune, & encore moins des Chandelles. Ils perdent leur vertu, exposés trop longtems de suite au jour. La plupart la conservent assez de tems, quoique noyés dans l'eau.

Quelques-uns plongés subitement dans l'eau, après avoir été allumés au jour, brillent d'un plus grand éclat, à mesure qu'ils se dissolvent, & s'échauffent par la dissolution; mais cet éclat s'évanouit presque entierement un moment après. La pâte liquide, qui est restée dans le Vaisseau & dans l'eau, ne laisse pourtant pas de redevenir encore un peu lamineuse par le jour, mais cette vertu lui dure à peine 24 heures.

Outre l'eau commune, M. du Fay a essayé l'Esprit de vin, l'Huile, les dissolutions Acides ou Alkalines, pour voir lesquelles de ces liqueurs ôteroient aux Phosphores la propriété de luire, ou la diminueroient, & de quelle maniere: mais nous ne nous engageons point dans ce détail, que M. du Fay lui-même n'a presque fait qu'indiquer. Nous remarquerons seulement un phénomène singulier du Phosphore de la Bélemnite. Plongé dans l'Eau-forte, il y fait un bruit semblable à celui d'un Fer rouge plongé dans l'eau; tant les Soufres de ce Phosphore, quoiqu'af-  
sez

sez subtils pour avoir été allumés par la lumière seule du jour, sont cependant forts & vigoureux, ou empruntent de force des Acides de l'Eau-forte.

Il s'ouvre ici une vaste carrière où les Physiciens pourront s'exercer. Presque tout est devenu Phosphore; & si tout absolument ne le devient pas dans la suite, on sera dans une surprise contraire à celle où l'on fut d'abord par la Pierre de Boulogne. On pourroit être étonné que la Pierre d'Aiman demeure toujours aussi unique qu'elle l'est; car un très petit nombre de Corps Electriques, & qui d'ailleurs lui ressemblent très peu par les effets, ne méritent pas d'être comptés.



### OBSERVATION CHIMIQUE.

**M** LE FEVRE, Médecin d'Uzès, dont nous avons déjà parlé en d'autres occasions, a donné à l'Académie une nouvelle Observation, qui est une suite de son Phosphore rapporté en 1728 \*. Il s'aperçut que le Soufre commun, quoique très fixe, se dissipe facilement, qu'il s'unit fort vite avec le Fer, & qu'en les mêlant ensemble, le tout se change en un Colcothar, tout semblable à celui qu'on tire du Vitriol par une longue calcination. Il faut prendre de la Limaille de Fer & du Soufre dans les mêmes proportions que pour le Phosphore, & quand la dissolution du Fer

sera

\* p. 48. & suiv.



sera exactement faite par l'Acide du Soufre, la matiere étant en pâte molle, on la tirera du Vaisseau, & on l'exposera à l'Air, où elle s'échauffera dans peu de tems, & rendra une odeur de Soufre brulant; & au-lieu que celle du Phosphore demeure toujours noire, celle-ci deviendra rouge en quelques heures, & en poudre fine, stiptique au goût. C'est-là le Colcothar, que l'on a par une operation très facile; & ce n'est pas une simple curiosité, puisque le Colcothar est employé dans la Médecine & dans les Arts.

Si l'on met ce Colcothar dans de l'eau chaude, on trouvera après l'avoir remuée, filtrée & évaporée, qu'il reste au fond du Vaisseau un vrai Vitriol de Mars, provenu de l'Acide du Soufre, qui s'est attaché au Fer, l'a corrodé, & s'est uni avec lui pour composer un corps salin très différent du Soufre commun, & du Fer. Voilà donc un changement assez nouveau du Soufre en Sel; merveille qui est cependant diminuée parce que le changement ne tombe que sur la partie saline du Soufre transportée ailleurs, & qu'on ne tient pas compte de la partie inflammable. M. le Fevre laissé, dit-il, aux plus habiles le soin de chercher ce qu'elle est devenue.

Il conçut en réfléchissant sur ces expériences, que l'Eau de Chaux, qui dissout le Soufre commun, pourroit bien aussi le changer en Sel, parce que les Acides du Soufre, au-lieu d'agir sur le Fer, agiroient sur les parties terrestres Alkalines que cette Eau contient; & cela se trouva en effet par les mêmes operations, ou à très peu près, qu'on vient

vient de rapporter. Apparemment on réduiroit de même en Sel les Bitumes, les Résines, & toutes sortes d'Huiles & de Graisses.

Comme le Sel qui se tire du mélange de l'Eau de Chaux & du Soufre, est un Alkali fort semblable par toutes ses qualités à celui que donnent des Eaux minérales de Languedoc, telles que celles d'Ieuzet, de St. Jean, d'Alais, M. le Fevre conjecture que le secret de l'opération par laquelle la Nature rend minérales toutes ces Eaux, est découvert. Il se fera trouvé auprès d'une Source une terre ou chaux mêlée de Soufre commun, & l'eau ayant mis l'Acide du Soufre en état d'agir sur l'Alkali de la chaux, ou terre, il se fera formé les Sels dont il s'agit, qu'elle aura ensuite entraînés avec elle.

Quoique les Sels de toutes ces Eaux paroissent fort semblables, les terres sont très différentes, & leur différence influe principalement sur la quantité du Sel. Cela ne doit s'entendre que des Eaux qu'on a nommées.

Il ne faut pas oublier une singularité remarquable de celles d'Ieuzet. Dès qu'elles ont été quelques momens sur le feu, il se forme à leur surface de petites Aiguilles blanches, transparentes, égales en longueur & en grosseur, d'une régularité parfaite, & qui, selon l'Auteur, ressemblent au Sel Sédatif de M. Homberg.

M. le Fevre, ne fût-ce que pour s'assurer de la découverte qu'il avoit faite du mystère de la composition de ces Eaux, n'a pas dû manquer d'essayer d'en faire par art. Il y a réussi assez facilement, & avec différentes

*Hist.* 1730.

D

ter-

terres. Ses Eaux artificielles ont la grande vertu des naturelles, qui est d'être fort rafraichissantes; sans compter qu'elles sont purgatives & diurétiques.



**N**OUS renvoyons entierement aux Mémoires

\* L'Ecrit de M. Bourdelin sur le Sel lixiviel du Gayac.

† Une Maniere plus simple de M. Boulduc, pour faire le Sublimé corrosif.

\* V. les M. p. 43.    † V. les M. p. 308.



## BOTANIQUE.

### SUR LES GREFFES\*.

**N**OUS avons dit en 1728 † que M. du Hamel, dans le dessein de découvrir si l'Art de greffer pouvoit faire naître de nouvelles especes de Fruits; s'étoit engagé dans une suite d'expériences sur cette matiere. Celles dont nous allons donner le précis ne regardent point encore la multiplication des especes, elles n'ont pour objet que l'Art de greffer en lui-même. Il a été fort exagéré par les Auteurs, qui en ont écrit, & l'expérience

\* V. les M. p. 147.    † p. 63. & suiv.

rience, qu'ils n'avoient pas assez consultée, rabat beaucoup de leurs discours.

Il est étonnant, quoique certain, & nous l'avons déjà dit, que la Greffe fasse quelque bon effet, qu'elle rende les fruits meilleurs. Nous nous en tenons à la cause rapportée en 1728, qui cependant est assez peu particularisée, mais qui, du moins jusqu'à présent, ne peut guere l'être davantage. Cela posé, ou juge aisément qu'il faut un certain rapport entre le Sujet ou Arbre sur lequel on ente, & la Branche entée ou Greffe; que les diamètres, les orifices, les figures des tuyaux se conviennent de part & sur-tout apparemment les Sèves, c'est-à-dire, qu'il faut que la Sève qui montera du Sujet s'accorde avec celle que la Greffe apportoit d'abord avec elle, & soit propre ensuite à être son unique aliment. Or les Sèves sont infiniment différentes entre elles, douces, acres, coulantes, visqueuses, aromatiques, fœtides, &c. Et l'on peut croire que de-là vient en grande partie l'amélioration des fruits. Ni le Sujet, ni la Greffe n'avoient une Sève entièrement propre à produire un fruit d'une certaine qualité; il étoit nécessaire que la Sève du Sujet fût travaillée dans d'autres organes que les siens, & on lui présente ceux de la Greffe, qui lui sont convenables, & n'auroient travaillé que sur une autre Sève moins bien conditionnée.

Ces rapports ne peuvent être que très délicats, le raisonnement ne peut jamais deviner entre quels Arbres ils se trouveront, & l'expérience seule peut enseigner où ils se

trouvent. Quoique délicats, ils ne sont pas uniques ; un même Sujet peut presque toujours porter également à peu près différentes Greffes, & une même Greffe être appliquée à differens Sujets.

Voici les principales observations de M. du Hamel sur cette matiere.

1<sup>o</sup>. La Greffe qu'il a reconnue pour réussir le mieux, est celle d'un Poirier sur un autre, ou d'un Cerisier sur un Merisier ; & celle qui réussit le plus mal est du Prunier sur l'Orme ; le Prunier périt aussi-tôt. On voit bien qu'entre ces deux cas extrêmes, la variété de tous les autres est infinie. Des Greffes qui réussirent, les unes reprennent plus ou moins facilement que les autres, poussent du bois & des feuilles plus ou moins vite, &c. C'est la même chose renversée, pour celles qui ne réussirent pas.

2<sup>o</sup>. Outre le rapport inconnu qui doit être entre les Vaisseaux & les Sèves du Sujet & de la Greffe, il faut qu'il y en ait un, que l'on peut connoître à peu près, entre les tems où le Sujet & la Greffe ont les principaux symptomes de leur végétation, où ils poussent, où ils sont en Sève. Des Amandiers, greffés par M. du Hamel sur des Pruniers de petit Damas noir, donnerent pendant une année entiere les plus belles esperances du monde, & après cela tomberent tous en langueur, & la plupart périrent assez promptement. Il n'en faut point chercher la cause dans la disproportion des Vaisseaux, ni des Sèves, puisque la premiere année où cette disproportion auroit dû avoir son plus grand

grand effet, fut si belle & si heureuse. D'ailleurs, ce qui prouve beaucoup de conformité à cet égard entre le Prunier & l'Amandier, c'est qu'on greffe le Pêcher sur l'un & sur l'autre avec le même succès. Mais à l'égard des tems ou des Epoque's remarquables de la végétation, il y a une grande différence entre le Prunier & l'Amandier, l'Amandier est toujours de beaucoup plus avancé. De-là il arrive dans les Greffes dont il s'agit, que l'Amandier peut demander de la nourriture au Prunier dans des tems où celui-ci n'est pas en état de lui en fournir, ou de lui en fournir assez. La Greffe ayant été faite en Automne, par ex. ils sont tous deux en repos pendant l'Hiver, l'un n'inquiete point l'autre; mais dès que l'Amandier a senti la première douceur du Printems que le Prunier ne sent pas encore, toute la Sève qu'il avoit apportée avec lui se met en mouvement, & il suce de plus celle du Prunier, qui peut suffire à cette dépense, parce que la branche de l'Amandier est encore très jeune, & se nourrit à peu de frais. Mais dès qu'elle est devenue plus grosse au bout de l'année, elle demande trop de nourriture au Prunier, & la lui demande toujours à contre-tems, lorsqu'il n'est pas encore en Sève. Le Sujet trop sucé & affamé par la Greffe, la Greffe mal nourrie, ou qui ne l'a pas été à propos, périssent tous deux, au moins d'une morte lente.

Si au contraire le Prunier a été greffé sur l'Amandier, la même mesintelligence à l'égard des tems se retrouve, mais avec un effet opposé. L'Amandier dès le premier commence-

ment du Printems fournit une nourriture que le Prunier n'est pas encore disposé à recevoir, parce que ses Vaisseaux ne sont pas assez ouverts par une foible chaleur, que le ressort de ses fibres n'est pas assez animé, &c. Le Prunier meurt de réplétion & d'engorgement, au-lieu que dans le cas précédent il mourroit d'inanition.

3°. Dans ces deux expériences opposées, il se forme à l'endroit de l'insertion de la Greffe sur le Sujet une espece de bourlet, ou bien il s'y amasse une Gomme. Quelque mouvement que la Sève ait dans les Plantes, soit celui de circulation, soit tout autre, il faut toujours qu'elle ne demeure pas dans les Vaisseaux sans mouvement. Dans la 2<sup>de</sup> expérience il est bien aisé de comprendre que l'Amandier fournissant au Prunier une Sève qu'il ne peut recevoir, elle s'arrête & fait une obstruction à l'endroit où elle devoit entrer dans le Prunier, c'est-à-dire, à l'endroit de l'insertion. Mais dans la 1<sup>re</sup> expérience où le Prunier ne fournit pas assez à l'Amandier, & où l'Amandier tire trop, il ne paroît pas que ce soit la même chose; cependant cela revient au même. Dans le tems que l'Amandier tire trop, le Prunier se dessèche & s'amaigrit, ses Vaisseaux perdent de leur capacité; & lorsqu'ensuite il est en Sève, il en a plus que ses Vaisseaux n'en peuvent contenir à l'aise, elle ne s'y meut pas avec facilité, & il s'en fait des amas vers l'insertion, parce que c'est là que finissent les vaisseaux du Sujet.

4°. Ces bourlets, ces gommages, &c. sont tout

tout au moins des maladies avec lesquelles les Arbres peuvent vivre, mais ce sont souvent des causes de mort; la Sève arrêtée se corrompt ordinairement, comme notre sang, & dans les deux exemples rapportés une assez prompte mort est presque infaillible.

5°. Que la Greffe meure de la mort du Sujet, il n'y a rien là de remarquable. D'où pourroit-elle tirer sa subsistance? Mais si la Greffe ne peut pas survivre au Sujet, le Sujet peut survivre à la Greffe, ou se porter bien, tandis qu'elle est malade. Ses Sucres qui n'entrent plus ou n'entrent qu'avec peine dans des Vaisseaux étrangers, se meuvent librement dans les siens propres, & font de nouveaux développemens de parties, qui font de nouveaux jets.

6°. La Greffe peut être utile au Sujet, & le faire vivre plus longtems, ce qui est une espèce de paradoxe. Cela vient de ce qu'elle lui ôte des qualités vicieuses, ou en empêche l'effet. Le Pêcher de noyau est fort délicat, & en même tems abondant en productions inutiles qui l'épuisent; il pousse beaucoup de bois qu'il faut retrancher, il est presque toujours plein de bois mort, le tronc lui-même meurt aisément, & enfin l'Arbre dure peu d'années. M. du Hamel ayant fait enter sur des Pêchers de cette espèce des Pruniers de la Reine Claude, il y a déjà 18 ans que ces Arbres greffés durent, quoique languissans, & ils n'eussent certainement pas joui d'une si longue vie, si les Pêchers, qui abandonnés à eux-mêmes auroient eu une végétation excessive & indiscrete, n'en eussent trou-



vé le remede dans celle des Pruniers, qui la moderoit en ne tirant que les suc qui se pouvoient dépenser utilement.

7°. Quelques Arbres vivent plus longtems greffés sur des Sujets foibles, & qui durent peu, que sur des Sujets plus robustes, & plus vivaces. Le Prunier dure plus que le Pêcher de noyau, cependant le Pêcher nain dure plus longtems sur le Pêcher de noyau que sur le Prunier. C'est-là un effet bien sensible d'une convenance que l'on eût pu conjecturer sur les noms seuls de ces Plantes; mais il se trouve & il se trouvera encore à l'avenir une infinité de ces rapports, qui seront tout à fait imprévus.

8°. En général, quelque rapport qu'il puisse y avoir entre le Sujet & la Greffe, M. du Hamel conclut de ses expériences, que les Arbres greffés durent moins que s'ils ne l'avoient pas été. La Greffe raffine les suc, & rend les fruits meilleurs; mais d'un autre côté elle fait toujours violence à la nature, en alterant la constitution organique de l'Arbre. Il n'est pas hors d'apparence que, toutes choses d'ailleurs égales, les peuples sauvages ne vivent plus, que ceux qui sont civilisés & polis.



## SUR L'ANATOMIE DE LA POIRE \*.

**L**es Plantes étant bien sûrement des corps organisés, les fruits qui en sont les parties les plus nobles, & celles pour lesquelles toutes les autres sont faites, ne peuvent manquer non seulement d'être organisés aussi, mais de l'être plus finement, & avec plus d'art. La difficulté n'est que de découvrir cette organisation. L'Anatomie des Animaux, dès qu'ils sont un peu grands, est en quelque sorte grossière & facile; une charpente d'Os bien liés ensemble, de gros Vaisseaux sanguins, &c. se présentent d'eux-mêmes aux yeux. Mais il n'en va pas ainsi d'une Pêche, d'un Abricot, d'une Pomme; à l'exception des Noyaux, ou des Pepins, on n'y voit qu'une chair, un parenchyme uniforme, qui n'a point de parties distinctes les unes des autres, & où la dissection ne paroît avoir aucune prise. Cependant, quelques grands Observateurs ont entrepris de faire celle de la Poire, qu'ils ont peut-être préférée, parce que ce fruit, lorsqu'il est pierreux, a plus de diversité dans sa substance que beaucoup d'autres; & M. du Hamel a voulu marcher sur leurs pas.

Après qu'il a eu essayé différens moyens pour parvenir à disséquer des Poires, différentes liqueurs, qui par la macération ren-

dis-

\* V. les M. p. 426.

## §2 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

diffent leurs petits organes plus visibles, enfin il a trouvé que la liqueur la plus favorable étoit l'Eau commune. Mais pour donner une idée ou du travail, ou de la patience que demande l'opération, il nous suffira de dire que quelquefois il a fallu laisser macerer une Poire pendant deux ans, & que souvent quand on a commencé à en détacher bien adroitement avec un instrument très fin un filet, qui est quelque Vaisseau, il faut pour achever de le détacher, remettre la Poire en macération encore quinze jours. La dissection a toujours été faite sur des fruits qui nageoient dans l'eau, afin de profiter autant qu'il étoit possible de leur augmentation de volume, quoique petite, & de la disposition que les différentes parties pouvoient prendre à se séparer. On juge bien que les meilleurs Microscopes ont été mis en usage.

Il ne s'agit encore présentement que de la peau de la Poire, par où M. du Hamel a commencé; le reste viendra dans les années suivantes. Nous avons fait en 1702 \* une description abrégée de la peau du Corps humain composée de trois Membranes, qui s'envelopent les unes les autres; celle de la Poire l'est de quatre, que M. du Hamel a eu l'art de distinguer. Il appelle la 1<sup>re</sup> enveloppe *Epiderme*, la 2<sup>de</sup> *Tissu muqueux*, à cause d'une certaine viscosité, la 3<sup>me</sup> *Tissu pierreux*, & la 4<sup>me</sup> *Tissu fibreux*.

L'Epiderme de la Poire a assez d'analogie avec celui de l'Homme. C'est une membrane d'une

\* p. 40. & suiv.

d'une consistance plus ferme que celle du fruit, & par-là destinée à le défendre des injures du dehors : elle réduit la transpiration du fruit à être de la quantité nécessaire, & parce que son tissu serré en empêche l'excès, & parce que le grand nombre de pores, dont elle est percée, ouvrent assez de passages. Cet Epiderme tombe par petites écailles comme celui de l'Homme, & se régénère de même sans laisser de cicatrice. On ne fait pas encore si notre Epiderme est produit par l'épaississement de quelque suc arrivé à la superficie extérieure du corps, ou par l'expansion des derniers filets très déliés de quelques Vaisseaux; à plus forte raison cette détermination ne sera-t-elle pas aisée à faire pour la Poire. M. du Hamel inclineroit à penser que son Epiderme est la dernière superficie du Tissue muqueux condensée par l'air.

Ce Tissue, immédiatement posé sous l'Epiderme, & très difficile à en détacher, est apparemment formé par un entrelacement de Vaisseaux très déliés, & pleins d'une liqueur un peu visqueuse. Il est vert naturellement, mais quand la Poire a pris du rouge par le Soleil, quelquefois cette couleur ne passe pas l'Epiderme, quelquefois elle pénètre jusqu'au Tissue muqueux, & le pénètre même tout entier. Il est sujet à des accidens & à des maladies, les coups de Grêle le meurtrissent & le dessèchent, la trop grande humidité le corrompt, quelques Chenilles s'en nourrissent après avoir détruit l'Epiderme, une très petite Mitre, qui n'a point entamé l'Epiderme, va le manger. Quand il est détruit dans tou-

te son épaisseur, il ne se régénere point, il se forme à sa place une espèce de Galle gommeuse.

La troisieme enveloppe ou partie de la peau totale de la Poire, est le Tissu pierreux. On fait assez ce que c'est que ce qu'on appelle *pierres* dans la Poire, ces grumeaux plus durs que le reste de sa substance, tantôt plus, tantôt moins gros, & quelquefois amoncelés en petits Rochers. On nomme les Poires *cassantes*, ou *fondantes*, selon qu'elles en ont ou n'en ont pas, ou en ont moins. Ces pierres n'appartiennent pas seulement à cette enveloppe qui est le Tissu pierreux, elles se trouvent répandues dans tout le reste du fruit; mais elles sont arrangées dans ce Tissu plus régulièrement les unes à côté des autres, & enfin elles le sont de maniere à former une enveloppe, ce qui suffit ici. Comme elles sont de la même nature que les autres, il sera à propos de les considerer toutes ensemble.

Elles commencent dès la queue de la Poire, & s'étendent sur toute sa longueur, posées entre les Tégumens de cette queue, & un faisceau de Vaisseaux qui en occupent l'axe. Quand elles sont entrées dans le fruit, il y en a une partie qui s'épanouit, & va former le Tissu pierreux en tapissant toute la surface intérieure du Tissu muqueux; l'autre partie se tient serrée le long de la queue prolongée, ou de l'axe de la Poire, & y forme comme un canal pierreux d'une certaine largeur. Ce canal arrivé à la région des Pépins se partage à droite & à gauche, prend  
plus

plus de largeur de part & d'autre, & ensuite va se réunir au-dessus des Pepins, & reprend la forme de canal pour aller aboutir à l'Ombilic, ou à la Tête de la Poire. Il y trouve le Tissu pierreux, auquel il s'unit, & tous deux ensemble forment un Rocher très sensible.

Cela n'empêche pas qu'il n'y ait des pierres jettées çà & là moins régulièrement dans le reste du corps de la Poire. Elles sont liées par une substance plus molle, & plus douce. Il y en a, mais de beaucoup plus petites, jusque dans les Piores qu'on appelle *fondantes*.

La difficulté est de savoir quelles parties organiques sont ces Pierres, & quel est leur usage. M. du Hamel croit le pouvoir conjecturer sur les observations suivantes, faites avec grand soin dans l'esperance de quelque éclaircissement. Les pierres ne sont pas sensibles dans les fruits nouvellement noués, ce ne sont que de petits grains blancs sans solidité; mais ils durcissent ensuite & grossissent à tel point, que les fruits encore fort petits ne sont presque que des pierres, moins dures cependant qu'au tems de la maturité, mais en plus grand nombre par rapport au volume du fruit, car à mesure que le fruit croît depuis un certain point, les pierres ou croissent moins, ou ne croissent plus, & même il en disparoît. Quand elles sont dans leur parfaite grosseur, on peut voir quantité de filets, ou qui y entrent, ou qui en sortent. Leur substance n'est point formée par lames ou par couches, mais par grains.

Sur tout cela M. du Hamel conjecture que

les Pierres sont des Glandes végétales analogues aux animales, & qui font des sécrétions de sucs. On fera aisément l'application de cette idée à ce qui vient d'être dit : seulement sera-t-il peut-être à propos d'expliquer comment les Pierres cessent de grossir, tandis que le fruit grossit encore. C'est que des sucs tartareux & pierreux s'amassent facilement dans des conduits très étroits, & n'y peuvent plus couler. La Glande ou Pierre ne croîtra donc plus, & même elle diminuera, soit par une transpiration qui ne sera point réparée, soit par un reflux de sucs dans le reste du fruit; il continuera de croître en l'un & en l'autre cas.

M. du Hamel observe que le tems où le fruit noue, & un peu après, étant précisément le tems où l'Arbre travaille le plus à la production des Pepins, partie si importante, les Glandes végétales sont alors & en plus grand nombre & plus molles, pour fournir mieux les sucs nécessaires. Quand elles se sont obstruées, & qu'elles ont acquis leur dernière dureté, qui ne leur permet plus la fonction de filtrer, elles ne deviennent pas pour cela inutiles, elle prennent la fonction d'Os, & servent d'appui aux autres parties du fruit, qui ont moins de consistance.

Une chose qui convient encore fort heureusement à l'idée de Glandes appliquée aux Pierres, c'est cette Roche qu'on voit à l'Ombilic de la Poire, cet amas de pierres plus grand qu'en aucun autre endroit. C'étoit le justement au tems de la fleur, que les Etamines & les Pétales prenoient naissance; c'étoit

toit là que se faisoient les plus importantes filtrations de sucs, & que des Glandes étoient le plus nécessaires.

Il reste la quatrième envelope qui fait partie de la Peau de la Poire, & qui est posée sous le Tissu pierreux. M. du Hamel l'appelle *Tissu fibreux*, parce que, comme la peau proprement dite des Animaux, il est formé d'un entrelacement perpétuel de Vaisseaux anastomosés les uns avec les autres. Ce n'a pas été sans beaucoup d'art, que ce dernier Tégument de la Poire a pu être démêlé d'avec les trois supérieurs ou plus extérieurs : mais il faudroit encore plus de sagacité d'esprit, & presque de la divination, pour démêler précisément les usages particuliers de chacun des quatre. M. du Hamel ne s'est pas engagé dans un détail qui ne seroit pas assez fondé sur l'expérience : il est plus sage d'éviter les raisonnemens où l'on n'est pas conduit par les faits.



## OBSERVATIONS BOTANIQUES.

## I.

**M.** Benoît Stéhélin, de Bâle, Correspondant de l'Académie, a écrit à M. Danty d'Isnard, qu'il avoit découvert dans la *Filicula Saxatilis*, *corniculata*, *Inst. R. H.* 542, que l'Anneau qui entoure l'Ovaire des Plantes Capillaires en doit être la partie spermatique, c'est-à-dire, celle où est renfermée cette poussière,



fiere, qui féconde l'Ovaire. Car dans cette espece l'Anneau est entouré de Zones transversales élastiques, qui en se rompant laissent échaper la matiere qu'il contient, & cette matiere a la couleur jaune des Spermes ou poussieres des autres Plantes. Quand elle est sortie, on voit les Anneaux vuides, transparents, non colorés, plissés d'une infinité de plis presque imperceptibles; quelques-uns de ces Anneaux ont conservé leur premiere figure, & d'autres ont crevé. On ne peut observer la matiere spermatique que dans le tems où les fillons des feuilles de la Plante, qui contiennent l'Anneau & l'Ovaire, sont encore fermés.

## F I.

Le même M. Stéhélin a vu un nouveau phénomène dans l'*Equisetum*, la Préle. Sa poussiere, entourée de lames élastiques, est d'un vert foncé, & elle est d'un gris-pâle de cendre, quand ces lames se sont débandées. Qu'on la mette sur quelque chose d'humecté, elle redevient en un moment de son premier vert. Ainsi il paroît que c'est l'humidité des lames qui lui donne la verdure, & quand ces lames se dessechent, elle doit la perdre, ou même en avoir plus ou moins, selon que les lames humides la ferreront & s'y appliqueront plus ou moins par un mouvement de contraction & de débandement.

## III.

## I I. I.

M. Sarrazin, Médecin de Quebec, Correspondant de l'Académie, a trouvé dans l'Amérique Septentrionale quatre especes d'Erable, qu'il a envoyées au Jardin Royal, après leur avoir imposé des noms. La 4<sup>me</sup> qu'il appelle *Acer Canadense Sacchariferum, fructu minori*, D. Sarrazin, est un Arbre qui s'élève de 60 ou 80 pieds, dont la Sève, qui monte depuis les premiers jours d'Avril jusqu'à la moitié de Mai, est assez souvent sucrée, ainsi que l'ont aisément reconnu les Sauvages & les François. On fait à l'Arbre une ouverture, d'où elle sort dans un Vase qui la reçoit, & en la laissant évaporer, on a environ la 20<sup>me</sup> partie de son poids, qui est de véritable Sucre, propre à être employé en Confitures, en Sirops, &c. Un de ces Arbres qui aura 3 ou 4 pieds de circonference, donnera dans un Printems, sans rien perdre de sa vigueur, 60 ou 80 livres de Sève. Si on en vouloit tirer davantage, comme on le pourroit, il est bien clair qu'on affoiblirait l'Arbre, & qu'on avanceroit sa vieillesse.

Cette Sève pour être sucrée demande des circonstances singulieres, qu'on ne devineroit pas, & que M. Sarrazin a remarquées par ses expériences. 1<sup>o</sup>. Il faut que dans le tems qu'on la tire, le pied de l'Arbre soit couvert de Neige, & il y en faudroit apporter, s'il n'y en avoit pas. 2<sup>o</sup>. Il faut qu'en suite cette Neige soit fondue par le Soleil, & non par un air doux. 3. Il faut qu'il ait  
ge-

tiés de chaque feuille pour les appliquer l'une contre l'autre, celle-ci les ferme en dessous; si lorsqu'elles sont dans leur position ordinaire, on les relève un peu avec les doigts pour les regarder de ce côté-là, elles se ferment aussi-tôt malgré qu'on en ait, & cachent ce qu'on vouloit voir. Elles en font autant au coucher du Soleil, & il semble qu'elles se préparent à dormir. Aussi cette Plante est-elle appelée tantôt *Chaste*, tantôt *Dormeuse*: mais outre ces noms, qui lui conviennent assez, on lui a donné quantité de vertus imaginaires, & il n'étoit guere possible que des Peuples ignorans s'en dispensassent.

Cette Plante aime les lieux chauds & humides, sur-tout les bois peu touffus, où se trouve une alternative assez égale de Soleil & d'ombre. M. Garfin en a reconnu deux especes.

Il a traité tout ce Sujet selon la méthode la plus exacte des Botanistes, au-lieu que nous n'en avons pris que ce qu'il y a de plus intéressant pour la curiosité ordinaire.

## GEOMETRIE.

SUR UNE THEORIE GENERALE  
DES LIGNES  
DU QUATRIEME ORDRE \*.

NOUS avons déjà entamé cette matière en 1729 †, quoique légèrement, tant à l'occasion d'un Ecrit de M. Nicole sur les Lignes du 3<sup>me</sup> ordre, que d'un autre de M. de Maupertuis sur une affection singulière de quelques-unes du 4<sup>me</sup>. Mais une Théorie générale de ces dernières Lignes, entreprise par M. l'Abbé de Bragelongne, nous ouvre un champ, sans comparaison plus vaste ; & nous pourrions dire, en changeant un seul mot dans un beau vers de Virgile,

*Magnus ab integro Curvarum nascitur ordo.*

Car au pied de la lettre, cet ordre contient un très grand nombre de Courbes ; & M. de Maupertuis, le seul qui y ait touché jusqu'à présent, n'a touché qu'à une de leurs propriétés.

Et-

\* V. les M. p. 226. & 517. † p. 49. & 59.

## 94 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

Elles sont, les unes finies, ou rentrantes en elles-mêmes, comme le Cercle & l'Ellipse ; les autres infinies, comme la Parabole, & l'Hyperbole ; les autres *mixtes* de ces deux especes. Les finies, qui ne doivent pas être si simples que le Cercle, se nouent & se renouent plusieurs fois en forme de rubans. Les infinies, où n'ont pas des Asymptotes droites, non plus que la Parabole, mais en ce cas elles en ont de courbes ; ou elles peuvent être *inscrites* à leurs Asymptotes droites, ou *ambigènes*, ainsi que nous l'avons expliqué en 1722. Les Courbes mixtes, après s'être renfermées dans un espace déterminé, se nouent, & portent leurs branches dans l'Infini. Quelquefois ces branches infinies ne partent pas de cet espace déterminé & circonscrit, elles le rencontrent en leur chemin, & le traversent comme une branche d'Hyperbole traverseroit par une espede de hazard un Cercle ou une Ellipse. Cependant ces espaces, ou plutôt ces Contours fermés, qu'on peut appeller en général des *Ovales*, appartiennent essentiellement à la Courbe, & en font partie. Ils en font même encore une partie essentielle, lorsqu'ils en sont entièrement détachés, & comme isolés. On les appelle alors *Ovales conjugués*, parce qu'elles se rapportent à la Courbe, quoique sans liaison sensible ; si elles y étoient attachées de quelque façon que ce fût, comme lorsqu'elles seroient traversées par une branche de la Courbe, on les appelleroit *adhérentes*. Il y a plus : des points mathématiques, qui ne se trouvent dans aucun des contours de la Courbe,

be, ne laissent pas de s'y rapporter, non pas comme des centres ou des foyers, mais comme des points qui seroient dans quelque contour de la Courbe, & cependant ils n'y sont pas, ils ont des Abscisses & des Ordonnées qui leur répondent, aussi-bien qu'à tous les autres points du cours de la Courbe, ils en font des parties qui ne peuvent être aperçues par les yeux, mais seulement par une recherche subtile de l'esprit. Enfin si les Lignes du 3<sup>me</sup> ordre peuvent avoir des Inflexions & des Rebroussemens, à plus forte raison celles du 4<sup>me</sup>, susceptibles par leur nature d'une plus grande complication, & qui à l'égard de ces deux affections la portent si loin, qu'elles peuvent quelquefois, ainsi qu'il a été dit, les avoir d'une manière invisible. On seroit frappé des variétés, & des bizarreries des Lignes du 4<sup>me</sup> ordre, si on en voyoit les plus singulieres & les plus dissemblables tracées sur le plan.

Il faut cependant que l'Algebre attrape & démêle par ses fines operations toutes ces variétés, & ces bizarreries. Elle ne le peut qu'en développant avec industrie l'Equation, où toute la Courbe avec tout ce qui lui appartient est contenue, &, pour ainsi dire, roulée à peu près comme une Plante dans son germe. Là sont renfermées toutes les droites qui ont rapport à la Courbe, & la déterminent, Abscisses, Ordonnées, Tangentes, Sécances, &c. Les Abscisses & les Ordonnées, & toutes les autres qui en dépendent, sont représentées par les Racines, de l'Equation, égales ou inégales, positives, ou

ou négatives, ou imaginaires, & ces imaginaires mêmes sont d'une grande utilité. Il s'agit donc de tirer d'une Equation toutes ses Racines, de les combiner ensemble, & de voir tout le jeu géométrique qu'elles peuvent produire.

En général, une Ligne quelconque ne peut jamais être coupée par une ligne droite, qu'en autant de points que le plus haut Exposant de son Equation a d'unités. Ainsi une ligne droite pouvant avoir, aussi-bien qu'une Courbe, des Abscisses & des Ordonnées, dont l'Equation ne peut avoir pour Exposant que 1, une ligne droite ne peut être coupée par une autre droite qu'en 1 point; les 4 Sections Coniques, qui sont les premières Courbes, ne peuvent être coupées par une droite qu'en 2 points, parce que leur Equation n'est que du 2<sup>d</sup> degré; les lignes du 3<sup>m</sup>e ordre en 3 points, &c. En effet, il est évident qu'une droite, qui a une fois coupé ou rencontré une autre droite, ne peut plus à cause de la rectitude de son cours la rencontrer une 2<sup>d</sup>e fois; si l'on vouloit qu'elle la rencontrât encore, il faudroit que cette droite coupante changeât de nature, perdît sa rectitude, & alors en se détournant de son premier cours elle pourroit revenir trouver une 2<sup>d</sup>e fois la droite déjà coupée. Si l'on vouloit qu'elle y revînt une 3<sup>m</sup>e fois, il faudroit alterer davantage sa rectitude, & toujours ainsi de suite: d'où l'on voit que les Courbes sont, selon cette idée, d'autant plus courbes qu'une droite les peut couper en plus de points, & que leurs differens ordres, en y comprenant

mé-

même les lignes droites, ont été légitimement établis sur ce fondement.

Toute droite n'est pas obligée à couper une Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'Exposant de son Equation, ou, ce qui est le même, de son ordre; il suffit qu'il y ait quelque droite qui le fasse, & celle qui l'a une fois fait ne peut plus rencontrer la Courbe en aucun autre point.

L'intersection se fait par un seul point commun aux deux lignes quelconques; mais l'attouchement, qui ne peut être qu'entre une droite & une Courbe, ou entre deux Courbes, se fait par deux points communs aux deux lignes; & comme deux points déterminent la position d'une droite, de-là vient que la Tangente & la Courbe touchée ont la même position en ligne droite à l'endroit de l'attouchement, ou, ce qui revient au même, qu'une droite infiniment petite, qui est un côté de la Courbe, lui est commune avec la Tangente. Un attouchement, qu'on ne laisse pas d'appeller un point, vaut donc deux points d'intersection; & les Courbes, telles que les Sections Coniques, qui ne peuvent être coupées par une droite qu'en deux points, ne peuvent plus être ni coupées, ni absolument rencontrées par cette droite, dès qu'elle a été leur Tangente. Dans l'ordre suivant, qui est le 3<sup>me</sup>, une Tangente pourroit bien être encore ensuite Sécante de la Courbe, mais non pas Tangente une 2<sup>de</sup> fois, car deux attouchemens vaudroient 4 points d'intersection, qui sont impossibles dans cet ordre.

*Hist.* 1730.

E

Puif-



Puisque dans une Inflexion deux côtés de la Courbe sont exactement posés bout à bout en ligne droite, la Tangente au point d'inflexion a donc ces deux côtés de la Courbe communs avec elle, & si le simple attouchement fait par un seul côté valoit deux points d'intersection, celui-ci fait par deux côtés doit valoir 3 points d'intersection; ce qui se voit encore en ce qu'à 1 côté répondent 2 Ordonnées, 3 à 2 côtés, &c. & que chaque Ordonnée ne répond naturellement qu'à un point de la Courbe. De ce que l'attouchement au point d'inflexion vaut 3 points d'intersection, il suit, & qu'on ne doit commencer à trouver des inflexions que dans le 3<sup>me</sup> ordre, & que dans cet ordre une Tangente au point d'inflexion ne peut plus rencontrer la Courbe.

Si, comme nous l'avons expliqué en 1729\*, deux inflexions s'unissent & se confondent, il y aura 3 côtés mis exactement bout à bout en ligne droite, & par conséquent l'attouchement en ce point vaudra 4 points d'intersection: cette affection ne peut donc se trouver que dans le 4<sup>me</sup> ordre, & les supérieurs; & la Tangente qui aura rencontré une ligne du 4<sup>me</sup> en un point de cette espece, ne la rencontrera plus en aucun autre point.

On peut pousser aussi loin qu'on voudra l'idée de ces inflexions qui se confondent, de sorte qu'une inflexion sera simple, double, triple, quadruple, &c. & il est clair qu'à mesure que l'inflexion se compliquera, la Courbe sera d'un ordre plus élevé.

II

\* p. 59. &amp; suiv.

Il faut seulement remarquer que l'inflexion qui étoit invisible dans le cas de 1729, où n'étoit que double, ne sera pas invisible de même dans tous les autres cas, mais ne le sera qu'alternativement. Lorsqu'elle n'étoit que double, on imaginoit un arc concave, un convexe & un concave qui se suivoient, & l'arc convexe étant supprimé, les deux concaves s'unissoient, & par-là étoit effacée toute apparence d'inflexion. Si l'inflexion étoit triple, il faudroit imaginer un arc concave, un convexe, un concave & un convexe, & les deux du milieu étant supprimés, car il ne doit jamais rester que les deux extrêmes, un arc concave & un convexe s'uniront, ce qui est la forme naturelle de l'inflexion. Il est évident après cela, que si l'inflexion est quadruple, elle redevient invisible, & toujours ainsi de suite, tant qu'elle aura une dénomination paire, au-lieu qu'elle sera visible dans toutes les impaires.

Nous avons dit en 1729, que dans le cas de l'inflexion double, la plus simple des compliquées, l'arc supprimé de la Courbe devoit être conçu, non comme anéanti absolument, mais comme ayant tous ses côtés infiniment petits du 1<sup>er</sup> ordre réduits à n'être plus que du 2<sup>d</sup>. Quand l'inflexion est triple, ou quadruple, &c. il n'est nullement besoin de concevoir que les côtés des arcs supprimés soient réduits à une plus grande petitesse que celle du 2<sup>d</sup> ordre, car une plus grande ou une moindre étendue supprimée ne fait rien à la chose; & on peut remarquer en passant, que selon le Système de la Courbure établi dans

la *Géométrie de l'Infini*, la courbure sera toujours infinie dans les inflexions dont nous traitons ici, & peut-être tout autre Système géométrique auroit-il eu de la peine à en rendre raison.

A mesure que les Courbes en s'élevant d'ordre deviennent plus compliquées les droites qui s'y rapportent le deviennent aussi davantage, toutes droites qu'elles sont, c'est-à-dire, que les fonctions qu'elles ont par rapport aux Courbes se compliquent. Ainsi la fonction la plus générale & la plus simple des droites par rapport aux Lignes d'ordres quelconques étant de les rencontrer, une droite ne peut rencontrer une Ligne du 1<sup>er</sup> ordre ou une autre droite qu'en un seul point, où elle sera sa Sécante; dans le 2<sup>d</sup> ordre la droite peut être ou la Sécante d'une Section Conique en deux points differens, ou sa Tangente par deux points infiniment proches, & elle ne peut être l'un & l'autre; dans le 3<sup>me</sup> ordre une droite peut être ou Sécante d'une Courbe en trois points differens, ou Tangente en deux infiniment proches, & Sécante en un autre different, ou Tangente en trois infiniment proches, auquel cas ces trois points font une inflexion simple. En voilà assez pour faire voir comment la fonction de *rencontrer* qui appartenoit à une droite par rapport aux Lignes d'ordres quelconques, se complique toujours selon que les ordres sont plus élevés; car il sera très aisé de suivre cette idée si loin qu'on voudra.

Quand la fonction de la droite se complique, elle devient équivalente à plusieurs dif-  
fe-

ferentes droites selon le nombre de ses complications. Une Tangente est équivalente à deux droites sécantes, & parce que les deux points où elle rencontre la Courbe sont infiniment proches, elle ne peut être équivalente qu'à 2 lignes égales. Si elle est la Tangente d'une inflexion simple, elle sera équivalente à 3 lignes égales; à 4, si elle est Tangente d'une inflexion double; à 5, si elle l'est d'une inflexion triple, &c. Si, outre qu'elle est simple Tangente, ou Tangente d'une inflexion quelconque, elle est encore Sécante en 1, en 2, &c. autres points, elle sera équivalente à autant de droites égales que le simple attouchement, ou que l'inflexion en demandera, & de plus à autant de droites inégales qu'il y aura de points d'intersection. Dans le 4<sup>me</sup> ordre, que nous traitons ici, une droite pouvant être ou Sécante en 4 points, ou simple Tangente, & ensuite Sécante en 2 points, ou simple Tangente, & ensuite encore simple Tangente, ou Tangente d'une inflexion simple, & ensuite Sécante en 1 point, ou Tangente d'une inflexion double, cette droite pourra être équivalente ou à 4 droites inégales, ou à 2 égales, & encore à 2 autres égales différentes des 1<sup>res</sup>, ou à 3 égales, & à 1 inégale, ou à 4 égales.

C'est-là ce que l'Algebre sent, pour ainsi dire, avec une extrême finesse. Si on a, par exemple, l'expression algébrique d'une droite qui doit rencontrer une Ligne du 4<sup>me</sup> ordre ou Courbe du 3<sup>me</sup>, cette expression sera une Equation du 4<sup>me</sup> degré, qui par conséquent aura quatre Racines. Ces Racines se-

ront autant de valeurs de la droite, dont il s'agit, & cette droite sera par-là équivalente à quatre grandeurs. Il arrivera précisément selon les differens cas, que nous venons de marquer, que ces quatre grandeurs ou racines seront, ou toutes quatre inégales, ou qu'il y en aura deux égales, & deux autres différentes, égales entre elles, ou trois égales & une inégale, ou quatre égales. L'Algèbre représentera exactement le caractère de chaque cas particulier.

Tout ce que nous avons dit sur les Inflexions s'applique sans peine aux Rebroussemens: il n'y a qu'à concevoir des arcs directs & rebroussans, au-lieu d'arcs concavés & convexes. On verra comment la suppression de certaines portions de la Courbe qui a produit des inflexions multiples, & les a rendues alternativement visibles & invisibles, fera les mêmes effets sur les rebroussemens. Puisque le Rebroussement simple, ainsi qu'il a été prouvé dans la *Géométrie de l'Infini*, est formé par deux côtés infiniment petits exactement posés l'un sur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, la Tangente en cet endroit sera équivalente à trois droites égales, ou aura trois racines égales, quatre si le rebroussement est double, parce qu'il y aura trois côtés, & toujours ainsi de suite. La Tangente pourra encore être Tangente, ou Sécante en un autre endroit selon l'ordre de la Courbe, & l'égalité ou l'inégalité de ses valeurs ou racines. Il faut concevoir aussi que la suppression de quelque portion de la Courbe, qui a causé le rebroussement multiple, n'a été

été que la réduction de ses côtés au 2<sup>d</sup> ordre d'infiniment petit.

Nous n'avons employé jusqu'ici que les Tangentes pour faire entendre plus nettement de quelle maniere une droite devient équivalente à plusieurs par la multiplication de sa fonction, car comme cette équivalence détermine les principales affections des Courbes, & qu'elle se découvre par l'Algebre, c'est là que toutes les recherches doivent tendre. Mais ce ne sont pas les Tangentes que les Equations Algébriques des Courbes expriment directement, ce ne sont que les Abscisses & les Ordonnées, dont le rapport perpétuel constitue la nature de la Courbe, & il faut voir comment ces droites-là peuvent être multiples. Nous ne prendrons plus ce mot de multiples que dans un sens plus étroit, & nous ne le donnerons qu'aux lignes, soit Abscisses, soit Ordonnées, qui ayant plusieurs valeurs, les auront toutes égales.

Il est certain déjà qu'une Ordonnée ou Abscisse pouvant être Tangentes de la Courbe, elles seront multiples de la même multiplicité dont une Tangente pourra l'être selon le cas. Mais il faut approfondir un peu plus cette matiere.

Une Ordonnée ou Abscisse est multiple, quand sa fonction naturelle d'Ordonnée ou d'Abscisse est multipliée, ou, ce qui est à peu près le même, quand elle fait seule ce que faisoient en d'autres cas plusieurs différentes lignes de la même espece.

Que l'on conçoive un demi-Cercle rapporté

té à une droite extérieure, qui en sera à quelque distance, & vers laquelle il tournera sa convexité; de cette droite comme Axe partiront des Ordonnées terminées à tous les points du demi-Cercle. La fonction naturelle d'une Ordonnée étant de se terminer à un point de la Courbe, toutes ces Ordonnées seront simples, hormis celles des deux extrémités du demi-Cercle; car ces deux-là seront Tangentes, & se termineront chacune à deux points du demi-Cercle infiniment proches, tandis que toutes les autres ne se termineront qu'à un seul. Ces deux seront donc des Ordonnées doubles.

La fonction des Abscisses est de porter à leur extrémité une Ordonnée, & ici afin que deux Abscisses portent deux Ordonnées égales, il faut qu'elles soient inégales. Mais si l'on conçoit que cette inégalité ou différence des deux Abscisses diminue toujours, & devienne enfin nulle, il y aura par conséquent un point où une seule Abscisse fera la fonction de deux. Ce point est celui qui répond au milieu du demi-Cercle. L'Abscisse de ce point sera donc double, toutes les autres étant simples. Et en effet si le demi-Cercle venoit se poser sur l'axe, cette Abscisse seroit sa seule Tangente.

Pour s'assurer encore plus que la duplicité de l'une de ces deux lignes, Abscisse ou Ordonnée, n'emporte point nécessairement celle de l'autre, on peut remarquer que dans le 1<sup>er</sup> cas, qui est celui de l'Ordonnée double, toutes les Abscisses étoient constamment simples, tant celles des deux Ordonnées Tan-

gentes

gentes que de toutes les autres, & qu'il n'est arrivé aucun changement à ces Abscisses, parce qu'on a considéré en quoi quelques Ordonnées différoient des autres. De même dans le 2<sup>d</sup> cas, où l'on a trouvé une Abscisse double, l'Ordonnée qui y répondoit étoit constamment simple, & n'a reçu nul changement par la considération qu'on a faite de ce que son Abscisse avoit de particulier.

Ce qu'on a dit ici de la duplicité, suffit pour donner une idée générale de la multiplicité.

Il y a encore une manière dont la fonction de l'Ordonnée peut être multipliée, c'est lorsque l'Ordonnée se termine à un point où se coupent deux ou plusieurs branches de la Courbe; car alors chaque branche ayant sa suite d'Ordonnées qui lui appartient, distincte d'une autre suite, l'Ordonnée qui se trouve au point d'intersection des branches, appartient en même tems à ces différentes Suites, & fait autant de fois selon leur nombre la fonction d'Ordonnée, elle a autant de racines égales. S'il arrive qu'elle soit en même tems Tangente d'une branche, elle aura une racine égale de plus. Si l'attouchement se fait à une inflexion ou rebroussement simple ou multiple de la branche touchée, on verra sans peine par la simplicité ou multiplicité de l'inflexion ou du rebroussement, combien le nombre des racines égales doit augmenter.

Tout cela suppose que les racines d'une Ordonnée soient affectées du même Signe plus ou moins, car si elles sont affectées de differens Signes, elles ne sont plus la même



Ordonnée, fussent-elles égales; celles qui ont plus ou les positives étant au-dessus de l'Axe, celles qui ont moins ou les négatives sont au dessous.

L'Abscisse est autant de fois multiple, que la fonction de porter une Ordonnée est multiple dans le cas qui vient d'être exposé, non pas autant de fois que le seroit son Ordonnée par être Tangente simple ou multiple de quelque branche, cela est absolument étranger à l'Abscisse, mais autant de fois seulement que l'Ordonnée sera multiple par être au point d'intersection de plusieurs branches; car l'Abscisse sera autant de fois Abscisse, qu'il y aura d'Ordonnées différentes, quoiqu'égales, qui viendront se placer sur le même point de l'Axe.

Par cette même raison, l'Abscisse qui répond à un point de Rebroussement simple est deux fois Abscisse, car elle porte deux Ordonnées, dont l'une appartient à la suite des Ordonnées du cours direct, & l'autre à la suite des Ordonnées du cours rebroussant. Il est évident que cette idée ne s'appliqueroit pas aux Inflexions, quoique d'ailleurs les Inflexions & les Rebroussemens aient coutume d'aller ensemble, & de suivre les mêmes loix dans les Théories qui les regardent. Les Ordonnées de l'arc concave, & celles de l'arc convexe ne font que la même suite d'Ordonnées, & par conséquent l'Abscisse d'un point d'Inflexion n'est qu'une Abscisse simple. Celle d'un point de Rebroussement double seroit triple, &c.

On sous-entend assez, que les Abscisses doubles,

bles, triples, &c. ou qui auront 2, 3, &c. valeurs égales, auront aussi-bien que les Ordonnées le même signe: sans cela toutes les Abscisses, quoiqu'égales, ne seroient pas la même, puisqu'elles ne seroient pas toutes posées de même côté par rapport à l'origine de l'Axe.

L'Abscisse auroit pu être Ordonnée, & l'Ordonnée Abscisse: aussi les Géometres appellent-ils *Coordonnées* ces deux lignes prises ensemble, & il est arbitraire de donner à l'une ou à l'autre l'une des deux dénominations. Par conséquent une Abscisse, qui, comme on l'a vu, ne sera pas multiple parce qu'elle portera une Ordonnée multiple, le sera dans le cas où elle eût été multiple, si on l'eût prise pour Ordonnée, car elle n'a rien perdu de sa nature pour avoir reçu un autre nom. Ainsi lorsqu'une Abscisse est telle qu'étant prise pour Ordonnée elle eût été Tangente simple ou multiple de la Courbe, elle est Abscisse ou 2 fois ou un plus grand nombre de fois quelconque. Or on prend une Abscisse pour Ordonnée, lorsque par le point de la Courbe où se termine l'Ordonnée supposée on tire une droite parallèle à l'axe, car cette parallèle, qui a la même position que l'Abscisse, en a les propriétés, & représente parfaitement l'Abscisse.

Non seulement une droite est susceptible de l'idée de multiplicité selon les sens que nous avons expliqués, mais un point en est susceptible aussi; non pas un point qui seroit un Élément de Courbe, car ce seroit une vraie droite, quoiqu'infinitement petite; mais

un point mathématique, & absolu. Une Courbe étant décrite sur un plan, autant de fois qu'elle passe par un même point mathématique de ce plan, autant de fois ce point est multiple. Le point d'interfection de 2 branches, de 3 branches, &c. est un point double, triple, &c.

Un point d'attouchement, un point d'inflexion quelconques, ne sont point des points multiples, puisque la Courbe ne passe point plusieurs fois par un même point du plan, & qu'au contraire elle s'étend toujours d'un point à un autre contigu. Mais par la même raison un point de rebroussement simple est un point double, car on conçoit naturellement que la Courbe arrivée au dernier point de son cours direct repart de ce même point pour commencer son cours rebroussant. Il est vrai que selon l'idée que nous avons prise des Rebroussemens, & de toute la formation des Courbes, ce point n'est pas mathématique; ce sont deux droites infiniment petites exactement posées l'une sur l'autre, & c'est par une étendue infiniment petite du plan que la Courbe passe deux fois. Mais pourvu, ce qu'il faut bien observer, que l'on n'ait point d'égard à la position de cette petite étendue par rapport à quelque autre droite, elle ne sera plus qu'un point mathématique.

Il y a une autre espece de points beaucoup plus singuliere. Ces Ouales conjuguées, dont nous avons parlé, deviennent quelquefois infiniment petites; l'Equation de la Courbe permet qu'on égale à Zéro, ou qu'on anéantisse les grandeurs dont elles dépendent; elles

les font alors des points qui ne tiennent à aucune des parties de la Courbe, des points absolument invisibles aux yeux, si ce n'est aux yeux Géomètres : mais quelle sorte de points seront-elles ? Si je veux concevoir un Cercle infiniment petit, je conçois son diamètre infiniment petit du 1<sup>er</sup> ordre, sa circonférence de ce même ordre, & un peu plus que triple ; il n'y a point là de point multiple, ni rien qui y ressemble.

Mais je puis concevoir la chose tout autrement. L'Ovale conjuguée ou le Cercle, car cela revient au même, n'avoit que sa place déterminée sur le plan de la Courbe, mais non aucune position par rapport à un Axe, ce Cercle n'étoit ni parallèle, ni perpendiculaire, ni oblique à un Axe, mais tout cela à la fois dans ses différentes parties ; & parce qu'il avoit toutes les positions, il n'en avoit aucune. Je ne dois donc le concevoir réduit à aucune grandeur infiniment petite d'aucun ordre, mais au seul point mathématique, qui étoit son centre. D'un autre côté, il faut que ce Cercle si réduit conserve quelque trace de ce qu'il étoit, mais la moindre qu'il se puisse ; & je ne puis lui en imaginer une moindre qu'en concevant que deux de ces diamètres, qui se coupoient à angles droits, si l'on veut, ont décru jusqu'à n'avoir plus que le point central où ils se coupoient. Ces deux diamètres conservent au Cercle l'idée de ce qu'il a été Cercle, & comme ils ne sont plus que le point d'intersection de deux lignes, c'est un point mathématique double. Il est évident que ce sera la même chose pour

une Ovale, ou Courbe fermée quelconque.

En effet, si ce point-là n'étoit pas double, il ne seroit pas triple, car pourquoi triple plutôt que quadruple? pourquoi quadruple plutôt que quintuple, &c. Il seroit donc multiple d'une multiplicité infinie, ce qui est absurde.

Les Ovals adhérentes peuvent aussi bien que les conjuguées devenir infiniment petites. Alors elles sont aussi des points doubles, parce qu'elles étoient Ovals : mais parce qu'elles étoient adhérentes il reste nécessairement un point de la Courbe pour l'adhérence, & par conséquent le point total est triple. M. l'Abbé de Bragelongne est le premier qui ait découvert & examiné ces sortes de points.

Ainsi des Ovals devenues infiniment petites, les premières sont des points qui sont sur le plan de la Courbe, mais sans appartenir à aucune de ses branches, sans faire partie d'aucun de ses contours; les secondes sont des points qui font partie de quelqu'un de ses contours, de quelqu'une de ses branches, mais sans paroître en faire autrement partie que tous leurs autres points. Des premières proviennent des points multiples absolument invisibles aux yeux, & des secondes des points multiples dont la multiplicité n'est qu'en partie invisible.

Les points multiples de la 1<sup>re</sup> espece, qui n'appartiennent à aucune partie de la Courbe, lui appartiennent pourtant réellement, & de telle sorte qu'ils ont leurs Abscisses & leurs Ordonnées; à plus forte raison, ceux de la 2<sup>de</sup> espece. De plus, une droite tirée par quel-

quelqu'un de ces points est censée avoir rencontré la Courbe dans le nombre de points désigné par la multiplicité du point multiple, & elle ne peut plus la rencontrer que dans le nombre de points permis par l'Equation de la Courbe, ce qui marque bien combien ils en font essentiellement partie. Cela sera vrai encore à plus forte raison des points multiples d'Interfection ou de Rebroussement, & il suffira de le faire voir des points multiples provenus des Ovals.

Une droite qui a passé par un point mathématique, car ceux dont il s'agit en sont, peut encore passer par tel autre point qu'on voudra. Ainsi celle qui a passé par un point double invisible, peut encore couper la Courbe au moins en un point simple, ce qui en fait trois; & par conséquent une Section Conique ne pouvant être rencontrée par une droite qu'en 2 points, il ne peut y avoir de points doubles dans ce 2<sup>d</sup> ordre des Lignes, ils ne peuvent commencer à paroître que dans le 3<sup>m</sup>e, où il est clair qu'il ne peut y avoir que celui qui sera provenu d'une Ovale conjuguée. La droite qui aura passé par ce point, ne peut être que Sécante en un autre.

Dans le 4<sup>m</sup>e ordre il ne peut y avoir de point plus que triple; car il doit rester à la droite qui y auroit passé, encore un point de la Courbe où elle seroit Sécante. Puisque nous ne parlons ici que de points multiples provenus d'Ovals, celui-ci viendra d'une Ovale adhérente. Sans doute il peut y avoir dans cet ordre des points doubles. La droite qui passera par un de ces points, peut en-  
core

core être Sécante de la Courbe en 2 points, ou Tangente en 1 ; elle peut même passer encore par un autre point double, après quoi elle ne pourra plus du tout rencontrer la Courbe. Il peut donc y avoir au moins deux points doubles dans une Courbe de cet ordre, car ce que nous venons de dire ne prouve pas qu'il ne puisse y en avoir trois, qui ne pourroient être tous trois sur une même droite.

La multiplicité des points provenus d'Ovales peut augmenter par leur complication avec d'autres points multiples, qui seront provenus d'Intersections ou de Rebroussemens. Un point double provenu d'une Ovale conjuguée ne peut par ce moyen devenir plus multiple, parce que l'Ovale génératrice, pour ainsi dire, ayant été détachée de tout le reste de la Courbe, rien de tout ce qui forme cette Courbe ne passera par ce point.

Mais un point triple provenu d'une Ovale adhérente peut devenir plus que triple dans un ordre supérieur au 4<sup>me</sup>, parce que l'Ovale adhérente l'aura été à plus d'une branche de la Courbe, &, si l'on veut, à un point de Rebroussement, même multiple.

Les points multiples provenus d'Ovales ont une place déterminée sur le plan de la Courbe, & par conséquent une Abscisse & une Ordonnée, qui font chacune leur fonction autant de fois que le point est multiple, 2 fois si le point est provenu d'une Ovale conjuguée, 3 fois s'il l'est d'une Ovale adhérente; ce qui n'empêche pas que dans ce 2<sup>d</sup> cas le point ne puisse encore être multiple d'ailleurs, comme il vient d'être dit.

Mais

Mais il faut se souvenir que ces points, précisément autant que provenus d'Ouales, sont des points mathématiques, qui n'ont aucune position; & par conséquent on ne peut dire que l'Ordonnée d'un point double lui soit parallèle, ou perpendiculaire, ni pareillement son Abscisse, ou la parallèle à l'axe. Elles ne peuvent toutes les deux être traitées que de Sécantes en ces points, & jamais de Tangentes. Si le point est triple, l'Ordonnée ou l'Abscisse y pourront être Tangentes seulement, parce qu'elles le feront à la branche qui passe par ce point, & le rend triple; on jugera assez par-là des points qui seroient plus que triples.

Il est évident que puisque ces points sont multiples, leurs Abscisses & leurs Ordonnées le sont aussi, & de la même multiplicité.

Toutes ces idées fondamentales; & en quelque sorte métaphysiques, étant établies, il faut voir maintenant comment le Calcul géométrique s'y prend à démêler dans les Courbes du 4<sup>me</sup> ordre, dont il s'agit ici, les affections, qui peuvent naître de ces principes. Comme M. l'Abbé de Bragelongne ne traite encore entre ces Courbes que celles qui ont des points multiples, c'est là que doit tendre toute notre recherche, qui ne fera elle-même qu'une espèce de Théorie du Calcul.

L'Equation de la Courbe étant donnée, c'est de la combinaison des Abscisses & des Ordonnées, du différent jeu de cette combinaison, que l'on doit tout tirer.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée est  
com-



#### 114 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

communément simple; alors l'Ordonnée, & la parallèle à l'axe terminée à cette Ordonnée, sont Sécantes de la Courbe.

L'Abscisse étant simple, l'Ordonnée peut être multiple, ou avoir plusieurs valeurs. Si toutes ces valeurs sont inégales, elle fera Sécante de la Courbe en autant de points; si elles sont égales, elle fera ou simple Tangente, ce qui la rendra double, ou Tangente à un point d'inflexion quelconque, ce qui la rendra multiple selon la multiplicité de ce point, triple pour une inflexion simple & visible, quadruple pour l'inflexion invisible, &c. S'il y a des valeurs inégales, & d'autres égales, il est aisé de voir ce qui en arrivera.

L'Abscisse multiple ne peut avoir que des valeurs égales, car ce n'est jamais qu'une même Abscisse que l'on considère, prise sur une certaine étendue de l'axe.

L'Ordonnée étant simple, l'Abscisse peut être multiple, & alors l'Ordonnée n'est Sécante de la Courbe qu'en un point, & la parallèle à l'axe en est une Tangente autant de fois multiple que l'Abscisse a de valeurs, c'est-à-dire, simple Tangente à un point d'inflexion quelconque; car il ne peut pas y avoir là un point de rebroussement, qui empêcheroit l'Ordonnée d'être simple selon la supposition.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée sont doubles, l'Ordonnée se termine à un point double, qui sera ou un point d'intersection de deux branches, ou un point de rebroussement, ou un point provenu d'une Ovale conjuguée. L'Abscisse est double dans ces cas, & ne l'est

l'est avec l'Ordonnée qu'en ces cas.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée sont triples, l'Ordonnée se terminera à un point triple qui fera ou un point d'intersection de trois branches, ou un point de double rebroussement, ou un point provenu d'une Ovale adhérente.

En général, l'égalité de multiplicité de l'Abscisse & de l'Ordonnée signifiera toujours ces trois cas indéterminément, c'est-à-dire, qu'il y aura un point multiple de l'une des trois espèces.

Si l'Abscisse & l'Ordonnée toutes deux multiples ne le sont pas également, le cas des trois points multiples indéterminément marqués, qui étoit *pur*, & ne signifioit rien de plus, devient *mixte*, & signifie qu'outre un point multiple, il y a là un attouchement simple ou multiple. Cet attouchement appartient à celle des deux grandeurs, Abscisse, ou Ordonnée, dont la multiplicité excède l'autre. Ainsi si l'Abscisse est double, & l'Ordonnée triple, il y a là un point double, parce que l'Abscisse & l'Ordonnée sont doubles toutes deux : mais parce que l'Ordonnée a un degré de multiplicité de plus, il faut qu'en se terminant à ce même point double, elle soit Tangente d'une branche de la Courbe. Si c'étoit l'Abscisse qui eût cet excès de multiplicité, ce seroit la parallèle à l'axe qui seroit Tangente. Si l'excès de multiplicité est de 2 degrés, la Tangente le fera à un point d'inflexion, &c.

Dans le 4<sup>me</sup> ordre des Lignes où un point multiple ne peut être plus que triple, & l'Abscisse ou l'Ordonnée plus que quadruple,  
il

il est facile de voir ce qui résultera des différentes combinaisons de l'une & de l'autre. Le cas le plus compliqué sera celui de l'Abscisse triple, & de l'Ordonnée quadruple. Il y aura là un point triple, & l'Ordonnée qui s'y terminera sera Tangente d'une branche. On pourroit prendre pour un cas aussi compliqué celui de l'Abscisse double, & de l'Ordonnée quadruple, parce que le point double sera accompagné d'une inflexion ordinaire & visible.

Les points multiples, que nous trouvons dans toute cette recherche, demeurent encore indéterminés entre trois especes, & il faut ensuite déterminer à laquelle ils appartiennent. Jusqu'ici le Calcul de l'Algebre commune a opéré; & a suffi. L'Equation de la Courbe contenoit le rapport général & invariable des Abscisses & des Ordonnées exprimées par des grandeurs indéterminées & variables; on a déterminé une Abscisse arbitrairement, quoique le plus souvent il vaille mieux y apporter un certain choix; & en mettant cette grandeur connue dans l'Equation de la Courbe à la place de l'Indéterminée ou Inconnue qui représentoit les Abscisses, on a une nouvelle Equation, où il ne reste que l'Indéterminée ou Inconnue des Ordonnées, qui répondent à l'Abcisse supposée. Ces deux Equations ont chacune autant de racines, ou valeurs, soit réelles, soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans leur plus haut Exposant; & c'est-là ce qui donne la multiplicité des Abscisses & des Ordonnées, que l'on n'a plus qu'à comparer, & dont nous

avons

avons fait voir les conséquences: Quand on est arrivé par-là à reconnoître qu'il y a des points multiples de l'une des trois especes, le Calcul Algébrique ordinaire qui donne les valeurs égales, tant de l'Abcisse que de l'Ordonnée, ne va pas plus loin: mais parce que malgré cette égalité, qui jusque-là confond les trois especes, les Tangentes ou Soutangentes des differens points multiples sont différentes, il faut, pour lever l'indétermination, prendre le Calcul des Tangentes, qui est différentiel, & transcendant.

Quand le point multiple est formé par l'intersection de plusieurs branches, autant qu'il y a de branches, autant il y a de Tangentes à la Courbe en ce même point qui sont inégales; ou s'il y en a d'égales, affectées de differens Signes.

Quand le point est un point de rebroussement, toutes les Tangentes sont égales.

Quand le point est provenu d'une Ovale conjuguée, il a deux Tangentes égales, mais imaginaires parce que c'est un point mathématique, qui n'a point de position, & par conséquent point de Tangente, qui détermine toujours une position. Si le point est provenu d'une Ovale adhérente, il a deux Tangentes imaginaires, & une réelle à cause de la branche à laquelle il est adhérent. C'est proprement la Tangente de cette branche. On voit combien cela s'accorde avec un principe d'Algebre, que les racines imaginaires vont toujours deux à deux.

Voilà donc les trois especes de points multiples bien distinguées pour le Calcul. Comme

## 118 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

me la Soutangente d'un point simple d'une Courbe se trouve par une 1<sup>re</sup> Differentiation de l'Abscisse & de l'Ordonnée, ou, ce qui est le même, par le rapport de l'Infiniment petit de l'Abscisse à celui de l'Ordonnée, la Soutangente d'un point double se trouvera par une 2<sup>de</sup> Differentiation, celle d'un point triple par une 3<sup>me</sup>, &c. & l'Equation qui vient de la Differentiation convenable à la multiplicité de chaque point, renferme toutes les valeurs réelles ou imaginaires des Soutangentes, qui détermineront l'espece de chacun.

M. l'Abbé de Bragelongne applique toute sa Théorie des points doubles à un grand nombre de Lignes du 4<sup>me</sup> ordre, qui ont été presque toutes inconnues jusqu'à présent. Il finit par un Théorème curieux. Une ligne du 3<sup>me</sup> ordre ne peut avoir qu'un point double, une ligne du 4<sup>me</sup> n'en peut avoir qu'un triple, & en ce cas elle n'en aura point de double; mais une autre ligne du même ordre, qui n'aura point de point triple, pourra en avoir un ou plusieurs doubles. Si une ligne du 5<sup>me</sup> ordre, qui pourroit avoir un point quadruple, ne l'a pas, elle en pourra avoir de doubles, & en plus grand nombre, que si elle n'étoit que du 4<sup>me</sup> ordre; & ainsi de suite. Il s'agit de savoir seulement pour les points doubles, qui se trouveront dans tous les ordres; combien il s'en trouvera au plus dans chacun. M. l'Abbé de Bragelongne démontre que le nombre des points doubles étant 1 pour le 3<sup>me</sup> ordre, il sera 3 pour le 4<sup>me</sup>, 6 pour le 5<sup>me</sup>, 12 pour le 6<sup>me</sup>, 15 pour le 7<sup>me</sup>, & toujours ainsi selon la suite des Nombres Triangulaires.

res. Le fait est bien prouvé : mais quel rapport ces Nombres Triangulaires ont-ils, plutôt qu'une infinité d'autres, aux points doubles des différens ordres de Courbes ? On trouve assez souvent en Géométrie de ces sortes de marches réglées, sans qu'on apperçoive la nécessité précise de leur règle particulière. Cela vient en général de ce qu'on en a toujours mis quelque une dans le sujet que l'on considère ; on la connoît, puisqu'on l'a établie soi-même : mais celle-là en produit d'autres imprévues, qui y étoient renfermées sans que nous le fussions, & sans que nous sachions même comment elles y étoient, après les en avoir vu sortir.

~~~~~

SUR LES COURBES TAUTOCHRONES.*

LA Cycloïde est fort fameuse chez les Géomètres, principalement par son isochronisme. On fait que cette Courbe étant posée verticalement & renversée de sorte que ce qui étoit son sommet soit son point le plus bas, un Corps qui tombera le long de sa concavité jusqu'à ce sommet, tombera toujours en des tems égaux, soit qu'il ait commencé à tomber d'un point plus ou moins élevé. Cette propriété suppose que le corps tombe dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne lui fasse aucune résistance ; & comme l'Air n'en fait qu'une insensible, du moins dans des chutes de peu de hauteur, on n'a point eu besoin pour la pratique de chercher d'autres Courbes qui rendissent égaux les tems des chutes inégales.

Mais

* V. les M. p. 109.

Mais ce qui ne seroit pas nécessaire pour la pratique, l'est pour la Théorie, sur-tout pour celle qui cherche des difficultés à vaincre, & M. Bernoulli en a trouvé une occasion heureuse dans l'entreprise d'étendre l'isochronisme, ou pour nous servir comme lui d'une expression équivalente, le *tautochronisme* de la Cycloïde à d'autres Courbes parcourues dans des Milieux résistans. Il ne les suppose résistans que selon les quarrés de la vitesse du Corps tombant, hypothèse la plus vraisemblable, la plus communément reçue, & peut-être la seule qui rende possible la solution du Problème, tant il est difficile. Il ne tiendra qu'aux Géometres d'éprouver combien il l'est encore dans cette hypothèse-là même, & il faudra être habile pour le bien sentir. Cette raison nous empêche absolument de pouvoir donner aucune idée des finesses & des subtilités du Calcul de M. Bernoulli, & nous sommes obligés de nous contenter de quelques vues générales, & plus communes.

Un axe vertical, qui se termine au point le plus bas, ou sommet de la Cycloïde renversée, étant posé, & divisé en une infinité de parties infiniment petites égales, d'où partent les Ordonnées de la Cycloïde, j'appelle *instans* les tems infiniment petits pendant lesquels sont parcourus chacun des petits côtés de la Courbe, correspondans à une division de l'axe. A la fin de chaque instant le Corps tombant a une certaine vitesse, toujours plus grande d'instant en instant, & la même que s'il fût tombé jusque-là le long de la ligne droite ver-

verticale, car il ne tire l'accélération de sa vitesse que de ce qu'il y a de vertical dans son mouvement, & nullement de ce qu'il y a d'horizontal. Quoique la vitesse par laquelle il parcourt pendant chaque instant un petit côté de la Cycloïde soit la même que celle par laquelle il eût parcouru la partie droite verticale correspondante, cela n'empêche pas que l'instant par la Cycloïde ne soit plus long, parce que tous les petits côtés de la Cycloïde étant inclinés à l'Horizon, excepté le premier & plus élevé, ils sont plus grands que les petites droites verticales correspondantes, & ne peuvent être parcourus qu'en plus de tems. Si dans une 1^{re} chute le corps est tombé du point le plus élevé de la Cycloïde, & que dans une 2^{de} chute il ne soit tombé que de son point du milieu, j'entends par-là celui qui répond au point du milieu de l'axe vertical, il est visible que la somme des instans de la 1^{re} chute est deux fois plus forte par le nombre que celle des instans de la 2^{de}, & que de ce chef les tems totaux des deux chutes sont bien éloignés de l'égalité; mais les instans de la 2^{de} chute ont été plus longs par deux raisons, 1^o. parce que cette chute n'ayant pas commencé de si haut, la vitesse n'y a jamais été si grande que dans la 1^{re}, 2^o. parce que les côtés de la Courbe ont été plus inclinés dans sa 2^{de} moitié. Il est donc possible que les deux sommes d'instans malgré leur première inégalité se retrouvent égales, & ces deux chutes seront tautochrones. Mais afin que la Courbe porte ce nom, il faut qu'elles le soient toutes, de quelque

point

Hist. 1730. F

point qu'elles commencent pour aller se terminer au point le plus bas

Alors, comme il y a toujours un certain nombre de côtés de la Courbe communs à une chute quelconque & à une plus basse, il faut que ces côtés communs, les seuls qui seront parcourus par la chute basse, soient de telle grandeur qu'ils allongent les instans de la quantité nécessaire, & que quand dans la chute élevée ils seront parcourus après des côtés supérieurs, & par conséquent avec plus de vitesse, ils n'allongent plus les instans qu'autant qu'il faudra. Or leur grandeur dépend de leur position par rapport à l'Horizon, & le tout ensemble de leur position mutuelle ou respective, qui est ce qui fait la nature ou l'essence de la Courbe. Voilà d'où naît la Cycloïde dans un milieu non résistant, seule Courbe tautochrone connue jusqu'ici.

Mais si l'on considère la résistance du Milieu, uniforme en elle-même, parce que le Milieu sera également dense en toutes ses parties, & cependant croissante parce que la vitesse du Corps, qui pénètre le Milieu, croît toujours, & croissante selon les quarrés de cette vitesse, alors il faut faire de nouvelles considérations pour trouver une Courbe tautochrone. La résistance allonge le tems total de la chute, & tous les instans qui le composent, puisqu'elle retranche toujours quelque portion de la vitesse que produisoit ce qu'il y avoit de vertical dans la chute de quelque instant. Ce ne sont point les quarrés de la vitesse primitive, produite par le vertical de la chute, ce sont les quarrés de
la

la vitesse diminuée de chaque instant, auxquels la résistance se proportionne. Or cette vitesse diminuée l'est d'autant plus que la force absolue de la résistance est plus grande, & au contraire ; & par conséquent les instans sont allongés selon une certaine raison, dans laquelle doit entrer, outre le quarré de chaque vitesse, la force absolue de la résistance du Milieu. Cette force étant différente pour chaque Milieu, le tems total de la chute & les instans seront donc aussi différemment allongés ; & comme les côtés d'une Tautochrone doivent être, & chacun en particulier & tous par rapport les uns aux autres, posés de la maniere que demande la durée des instans, il y aura dans la seule hypothese de la résistance du Milieu proportionnée aux quarrés de la vitesse croissante, autant de différentes Tautochrones que de différentes résistances absolues possibles pour differens Milieux, c'est-à-dire, qu'il y aura uné infinité de Tautochrones, au-lieu que la Cycloïde étoit unique pour le Vuide.

M. Bernoulli comprend toutes les Tautochrones de son hypothese dans une Equation générale, où entrent l'infiniment petit d'un Arc quelconque, celui de l'Abcisse correspondante, & deux Indéterminées constantes, dont l'une est la résistance absolue du Milieu, & l'autre a rapport au tems total de la chute, le tout combiné avec l'Arc quelconque, & l'Abcisse.

Si dans cette Equation on suppose la résistance du Milieu nulle, on voit renaitre aussitôt la Cycloïde. On ne peut pas supposer

cette résistance infinie, il n'y auroit point de chute.

Si on suppose le tems total infini, car on ne peut pas le supposer nul, la Tautochrone devient la Tractrice, dont nous avons parlé assez au long en 1711 *. Cette Courbe a une Asymptote, & par conséquent un cours infini, & son point le plus élevé est infiniment éloigné du plus bas. Qu'un Corps, en suivant la concavité de la Tractrice, tombe ou de ce point le plus élevé, ou de celui qui sera, par exemple, à la moitié de l'étendue de la Courbe, ou au tiers, &c. jusqu'au point le plus bas, il tombera toujours dans le même tems infini, parce qu'à proportion qu'il tombera d'un point moins élevé, & acquerra par conséquent moins de vitesse, la résistance du Milieu diminuera moins aussi son mouvement. Que si le Corps ne tomboit que d'un point de la Courbe finiment éloigné du point le plus bas, sa chute demanderoit encore le même tems infini, ce qui est nécessaire pour le Tautochronisme, & paroît cependant un violent paradoxe. Mais on l'expliquera aisément en prenant les idées exposées dans la *Géométrie de l'Infini* sur les Courbes qui ont des Asymptotes. La portion finie de la Tractrice que le Corps auroit à parcourir dans le cas présent, seroit nécessairement selon ces idées presque absolument parallèle à l'Horizon, & telle que la pesanteur du Corps ne pourroit lui en faire parcourir une partie infiniment petite qu'en un
tems

* p. 75. & suiv.

tems fini, & par conséquent le tout en un tems infini, que la position particuliere des petits côtés de la Courbe rendroit égal aux autres tems infinis déjà trouvés.

Il est bon de remarquer, que comme la Cycloïde est la seule Tautochrone du Vuide, la Trajectrice est la seule Tautochrone du tems infini, & la seule par conséquent d'une étendue infinie.

Quand un Corps tombe dans un Milieu résultant, il reçoit des accroissemens continuels de vitesse par la continuation de sa chute selon ce qu'elle a de vertical, & en même tems des décroissemens continuels à cette même vitesse par la résistance du Milieu. Les accroissemens sont toujours égaux à chaque instant selon le systême de la Pesanteur, & les décroissemens au contraire toujours plus grands, à cause que la résistance croît dans la raison des quarrés des vitesses. Les accroissemens plus grands d'abord que les décroissemens, parce que les quarrés de la vitesse sont fort petits, ne sont donc plus grands que de moins en moins, ce qui amene nécessairement les uns & les autres à l'égalité, après quoi les décroissemens sont les plus grands. Il y aura dans la Courbe parcourue un point de la plus grande vitesse du Corps.

Qu'après ce point le Corps continue de tomber jusqu'au point le plus bas de cette Courbe, cela n'a rien qui la doive empêcher d'être tautochrone; ce point de la plus grande vitesse baissera toujours à mesure que le Corps tombera d'une moindre hauteur jusqu'au point le plus bas qui est fixe; & la

vitesse, plus diminuée par la résistance du Milieu qu'augmentée par l'action continuelle de la pesanteur, sera dans le même cas que si elle n'étoit diminuée que par la position des côtés de la Courbe, ce qui non seulement n'est pas contraire au tautochronisme, mais y est nécessaire.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'une partie du Problème résolu par M. Bernoulli, les descentes tautochrones d'un Corps; il faut de plus pour le parfait Tautochronisme que ce Corps arrivé au point le plus bas remonte en vertu de sa vitesse jusqu'à une certaine hauteur par une seconde branche de la Courbe, & cela en un tems égal à celui d'une descente quelconque. L'Equation générale de M. Bernoulli renferme ces deux conditions ensemble, au moyen d'un simple changement du Signe de quelques termes.

Dans la Cycloïde le Corps arrivé au point le plus bas avec une vitesse entière; & qui n'a essuyé aucune résistance, remonte à la même hauteur d'où il étoit descendu, en un tems égal, & par une seconde branche de la Courbe égale & semblable à la première; ce qu'on voit évidemment qui doit être, à cause de la parfaite égalité de tout de part & d'autre. Mais il n'en est pas de même dans une Tautochrone, où se trouve un point de la plus grande vitesse, qui n'est pas, comme dans la Cycloïde, son point le plus bas. Ce Corps ne peut remonter qu'avec cette vitesse diminuée qu'il a au dernier point ou instant de sa descente, par conséquent il ne peut remonter à une aussi grande hauteur que cel-

le

le d'où il est descendu ; & comme il faut qu'il remonte en un tems égal à celui de la descente , il faut que l'Arc remonté ait par rapport à l'Horizon l'obliquité nécessaire pour employer tout ce tems-là : d'où il suit que les deux branches de la Courbe , l'une descendue , l'autre remontée , ne seront ni égales , ni semblables ; seulement la branche descendue , prise depuis l'origine de la chute jusqu'au point de la plus grande vitesse , sera égale , mais non semblable , à la branche remontée , ainsi que M. Bernoulli le démontre.

Nous avons dit d'après feu M. Varignon en 1708 *, & 1709 † , qu'un Corps qui tomberoit en ligne droite dans un Milieu dont la résistance suivroit ou la raison simple des vitesses , ou celle de leurs quarrés , n'acquerrait dans l'un & l'autre cas au bout d'un tems infini qu'une vitesse finie , mais beaucoup moindre dans le second cas. Si l'on applique cette proposition à la Traîtrice qui est la Tautochrone d'un tems infini dans un Milieu résistant selon la raison des quarrés , le Corps qui parcourt la Traîtrice aura une vitesse finie au bout d'un tems & d'un cours infini. Il arrivera en un tems fini au point de sa plus grande vitesse , car il faudroit que la résistance du Milieu fût infiniment petite ou foible , pour ne pouvoir qu'au bout d'un tems infini diminuer plus la vitesse que la pesanteur ne l'augmente continuellement. Du point de la plus grande vitesse au point le plus bas , il

Y.

* p. 151. & suiv.

† p. 122. & suiv.

y aura donc une distance infinie. La Courbe aura une seconde branche égale à la portion de la premiere déterminée par la plus grande vitesse, & par conséquent finie, & presque entierement horizontale pour ne pouvoir être parcourue, ainsi qu'il a été dit, qu'en un tems infini.

La Cycloïde & la Tractrice sont les deux Tautochrones extrêmes & les plus opposées. Elles le sont parfaitement sur la position du point de la plus grande vitesse dans la premiere branche; il est dans la Cycloïde à l'extrémité de cette branche, puisqu'il est le même que le point le plus bas; & dans la Tractrice il est infiniment éloigné du point le plus bas: d'où il suit par analogie, que dans toutes les Tautochrones moyennes le point de la plus grande vitesse ne se confondra jamais avec le point le plus bas, & en fera toujours à une distance finie.

Il suit encore, que puisque la Cycloïde a ses deux branches égales & semblables, & que la Tractrice les a infiniment inégales & dissemblables, les Tautochrones moyennes les auront d'autant moins inégales & dissemblables qu'elles approcheront plus de la Cycloïde, & au contraire. Or elles approcheront d'autant plus de la Cycloïde que les Milieux seront moins résistans, & d'autant plus de la Tractrice qu'elles auront besoin pour être Tautochrones d'être parcourues en un tems plus long.

Nous ne disons rien des differens Problèmes résolus par M. Bernoulli sur la détermination du point de la plus grande vitesse, sur
la

la comparaison des différens Arcs de la Courbe, sur les constructions, &c. Non-content des difficultés naturelles du sujet, quoique très embarrassantes, il y en a même fait entrer d'étrangères. On reconnoitra par-tout une extrême adresse, soit à éviter des labyrinthes de Calcul, soit à se démêler de ceux qui étoient inévitables.



SUR LA COURBE

AUX APPROCHES EGALES*.

Les Courbes Tautochrones sont telles, parce que le Corps tombe toujours en un tems égal, soit qu'il tombe d'un point plus ou moins élevé; & il est visible qu'en ce tems égal il ne s'est pas également approché du point le plus bas de la Courbe, ou, ce qui est le même, de l'Horizon, car certainement il s'en est d'autant plus approché qu'il est tombé de plus haut. M. Leibnitz imagina de chercher une Courbe telle que le Corps qui la parcourroit, s'approchât toujours également de l'Horizon en un tems égal, par exemple, en une seconde. Il l'appella la Courbe *accessus æquabilis*, aux approches égales. Puisque dans une chute faite selon une droite verticale, la vitesse augmenteroit toujours & feroit que dans un tems égal le Corps décriroit toujours une plus grande portion de cet-

* V. les M. p. 333.

cette verticale, & par conséquent s'approcheroit davantage de l'Horizon, il est nécessaire que la Courbe modere cette augmentation de vitesse, & se dispose de façon que ce que la chute aura de vertical soit plus court, & ce qu'elle aura d'horizontal plus long, à mesure qu'elle avancera davantage vers son terme; & cela selon une certaine raison précise, quoique changeante à chaque instant. M^{rs}. Leibnits, Bernoulli & Varignon, comme nous l'avons dit en 1699 *, ont trouvé que cette Courbe étoit une 2^{de} Parabole cubique, posée de manière que son point de rebroussement fût le plus élevé.

Mais quoique M. Varignon eût porté selon sa coutume ce Problème à une grande universalité, en y mettant de nouvelles conditions, les *approches*, par exemple, inégales en telle raison qu'on voudroit, il étoit demeuré renfermé à un autre égard dans des bornes très étroites; les chutes se faisoient toujours dans le Vuide, ou dans un Milieu non résistant, ou, ce qui revient au même, dans un Milieu dont la résistance fût toujours uniforme, & indépendante de la vitesse du Corps.

M. de Maupertuis a élevé ce Problème à l'universalité qui lui manquoit; on trouvera toujours une Courbe aux *approches* égales, selon quelque puissance des vitesses que les Milieux puissent résister. S'ils ne résistent point, c'est la 2^{de} Parabole cubique déjà trouvée; & c'est encore elle, s'ils résistent selon la

* p. 82. & suiv.

la raison simple des vitesses, mais renversée, c'est-à-dire, s'ils résistent moins en même raison que la vitesse devient plus grande. Cette hypothèse ne paroît guere conforme à la Nature, mais enfin cela est analogue à ce que la Cycloïde, qui est la Tautochrone du Vide, ou du Milieu non résistant, l'est aussi du Milieu qui ne résisteroit que selon la raison simple directe des vitesses. Toutes les autres hypothèses de résistance des Milieux donnent des Courbes d'approches égales, fort différentes de la Parabole cubique. L'hypothèse de la résistance proportionnelle aux quarrés des vitesses suffiroit seule pour donner à M. de Maupertuis tout le plaisir qu'il a recherché dans des difficultés de Calcul, soit différentiel, soit intégral. Non-seulement il y a de ces Courbes que l'on ne construit, ou dont on ne peut avoir les Abscisses & les Ordonnées, que par des quadratures d'autres Courbes; mais encore ces autres Courbes se trouvent être des Exponentielles, c'est-à-dire, transcendantes par rapport à celles qu'on a nommées d'abord transcendantes par rapport aux Courbes algébriques.



Cette année, M. de Cury, dont nous avons déjà parlé en 1728 *, a lu à l'Académie un Mémoire qu'elle a approuvé, sur la Courbure des Courbes. *Les Elémens de la Géométrie de l'Infini* ont donné pour la détermi-

mination de cette Courbure, une méthode géométrique, différente de la méthode ordinaire, qui procède par les Rayons des Développées, Courbes étrangères à celles que l'on examine. La nouvelle méthode prend la Courbure des Courbes en elles-mêmes, & la détermine par les Sinus des Angles de Contingence. Mais elle a le défaut d'être bornée aux Courbes dont les Ordonnées sont parallèles, les plus communes de toutes, à la vérité, & de beaucoup les plus communes, mais non pas les seules; il restoit celles dont les Ordonnées sont concourantes en un point. M. de Cury a trouvé le moyen de rendre la méthode de la *Géométrie de l'Infini* absolument générale, & telle que sur les mêmes principes on y trouve la courbure des deux espèces de Courbes; elle est pour les Courbes à Ordonnées concourantes, & par un léger changement elle est pour les Courbes à Ordonnées parallèles. Il a donné des exemples de la 1^{re} espèce de Courbes, car il y en avoit assez de la 2^{de} dans l'Ouvrage cité, sur la Spirale ordinaire de tous les degrés, & sur la Spirale Parabolique.

~~~~~

**M** Clairaut, frere cadet de celui dont nous avons parlé en 1726 \*, a lu aussi à l'Académie une Méthode qu'il a trouvée pour former tant de Triangles qu'on voudra, avec cette condition, que la somme des quarrés

\* p. 61.

rés de deux côtés soit double, triple, quadruple, &c. du carré de la base; & comme ce qui est dit des carrés convient à toutes les figures semblables, il prend, au-lieu de carrés, des Segmens de Cercles semblables, & découvre par-là les quadratures de quelques especes de Lunules. Il rend plus étendue & plus générale la Méthode de M. de l'Hôpital, pour carrer quelque portion de la Lunule d'Hippocrate de Chio \*, & il carrer encore quelques autres portions de la Lunule, par une méthode différente de celles de M<sup>re</sup>. Wallis, & Tschirnhaus. Il a 14 ans, & ce seroit bien assez qu'il entendît les découvertes de ces grands Géometres, sans y rien ajouter, & sans renchérir sur eux; mais on a déjà vu que la Géométrie est extrêmement précoce dans cette Famille.



**N**ous renvoyons entierement aux Mémoires

† Deux Ecrits de M. Nicole sur quelques Questions qui regardent les Jeux.

‡ L'Ecrit de M. Mabieu sur de nouvelles propriétés de l'Hyperbole.

\* V. l'Hist. de 1701. p. 98. & suiv.

† V. les M. p. 60. & 471.    ‡ V. les M. p. 721.



## A S T R O N O M I E.

*SUR LA COMETE DE M. DCCXXIX.*

*ET DE M. DCCXXX \*.*

**L**A Comete dont nous avons parlé en 1729 †, qui n'a fait aucun bruit dans le monde, & n'a été connue que des Observateurs de profession, & apparemment même d'un petit nombre d'entre eux, est cependant une des plus remarquables & des plus singulieres dont on ait mémoire, & sur-tout des mieux conditionnées par rapport à l'établissement d'un système général de ces grands Phénomènes.

Elle avoit commencé à paroître, ou du moins à être apperçue le 31 Juillet 1729: nous en avons rendu compte jusqu'au 10 Nov. de la même année, & on l'a vue jusqu'au 21 Jan. 1730, encore ne la perdit-on qu'à cause du mauvais tems, & du clair de Lune; de sorte qu'elle a été visible près de 6 mois, & auroit pu l'être davantage. Il y a plus de 100 ans qu'il n'a paru de Comete d'une si longue durée.

Elle a toujours été d'Orient en Occident, ou contre la suite des Signes, depuis sa premiere apparition jusqu'au 19 ou 20 Oct. après quoi elle a été d'Occident en Orient, c'est-à

\* V. les M. p. 406. † p. 93. & suiv.

à-dire, qu'elle a été rétrograde & puis directe à la maniere des Planetes; & comme selon le calcul de M. Cassini elle avoit dû être en opposition avec le Soleil le 8 Août, tems où elle n'étoit pas encore observée à Paris, on a dû voir ici son mouvement rétrograde diminuer toujours, ainsi qu'auroit fait celui d'une Planete qui a passé l'opposition; & c'est en effet ce qu'on a vu. Il est naturel de supposer que le tems de sa premiere rétrogradation, c'est-à-dire, de celle qui a précédé l'opposition, ait été égal à celui de la seconde, & sur ce pied-là elle auroit commencé à être rétrograde dans les derniers jours de Mai 1729, & l'auroit été en tout près de 5 mois. C'étoit-là un tems bien suffisant pour son apparition totale, & s'il n'avoit pas été plus long, on auroit jugé qu'elle n'avoit qu'un mouvement d'Orient en Occident, qu'elle alloit donc contre la direction du Tourbillon Cartésien, & que cela étant impossible à la longue, ce Tourbillon n'existoit point. Il ne faut donc pas se presser de croire que les Tourbillons soient détruits par les mouvemens des Cometes, qui y sont opposés; & il y a au contraire une forte présomption, qu'ils se rétabliront parfaitement par l'explication de M. Cassini, que la Comete de cette année favorise à souhait.

En vertu de la rétrogradation & de la direction, qui a suivi, cette Comete a été vue dans le même lieu du Ciel en deux tems differens; ce qui est un avantage rare & considerable pour les déterminaisons astronomiques: mais nous ne pouvons que le faire entrevoir.

L'Or-

L'Orbe de la Terre autour du Soleil, quoiqu'il ait un diametre de 66 millions de lieues, est si petit par rapport à la distance des Fixes, qu'il peut n'être compté que pour un point, & que la Terre, qui lorsqu'elle est à l'extrémité d'un diametre, voit, par exemple, une Fixe au Zénit, l'y verra encore lorsqu'elle sera à l'autre extrémité; s'il y a une difference ou parallaxe, il sera bien difficile de l'appercevoir. Ainsi toutes les lignes, qui de la Terre placée en differens points de son Orbe iront à une même Etoile fixe, seront censées paralleles à cause de la distance presque infinie, & les arcs de l'Orbe compris entre deux paralleles consécutives, ou plutôt les cordes de ces arcs, seront les distances de ces paralleles entre elles, & les bases de triangles infiniment aigus, dont le sommet seroit infiniment éloigné. Si, outre l'Etoile supposée au Zénit, la Terre en regarde une autre de differens points de son Orbe, elle la verra encore par des lignes toutes paralleles entre elles, mais inclinées aux premières, plus ou moins selon la position des deux Etoiles.

Si un autre Astre qu'une Fixe est vu au même point du Ciel par la Terre placée en deux differens points de son Orbe, ou, ce qui est le même, en deux differens tems, il est à cet égard dans le même cas qu'une Fixe, & il est vu par deux paralleles: mais si cet Astre se meut, comme fait certainement une Comete, il est impossible qu'il soit vu dans les deux tems par les deux paralleles, à moins qu'il ne se soit mû selon la même direction que

que la Terre, qu'il aura suivie pour se retrouver à son égard dans la même position que s'il eût été fixe. Il n'importe quelle ligne il ait décrite entre les deux paralleles, courbe ou droite, perpendiculaire ou inclinée à ces paralleles; mais enfin pour passer de la premiere à la seconde, il faut puisqu'il s'est mù, qu'il se soit mù du même sens que la Terre, il n'y a que cette condition qui puisse faire l'effet de l'immobilité d'une Fixe. La Comete s'est donc mûe réellement d'Ocident en Orient pendant tout l'intervalle compris entre les deux tems, où elle a été vue au même lieu du Ciel, c'est-à-dire, aussi-bien pendant la rétrogradation que pendant la direction; & par-là M. Cassini amene à la certitude géométrique ce qui n'étoit auparavant que très probable. C'est la Comete vue deux fois dans le même lieu du Ciel, qui a fondé la démonstration.

Ces deux paralleles, par lesquelles la Comete a été vue au même lieu en deux observations differentes, ne peuvent déterminer ni quelle route la Comete a tenue entre elles, ce qui est clair, ni quelle est sa distance à la Terre; car puisqu'elles sont paralleles elles ne font point d'angles, & à quelque distance très grande qu'on suppose la Comete, ce sera toujours la même chose. Mais si on prend une 3<sup>me</sup> observation, où la Comete aura été vue dans un autre lieu du Ciel, & que du point de l'Orbe de la Terre d'où cette observation aura été faite on tire une ligne à la Comete, cette ligne sera nécessairement inclinée aux deux paralleles, puisque la Comete



mete est vue dans un autre lieu, & l'inclinaison sera d'autant plus grande, ou l'angle de la nouvelle ligne avec les deux premières d'autant plus petit, que la distance de la Comete à la Terre sera plus grande. Voilà le principe fondamental de la détermination de cette distance, qui demande pourtant encore assez de Géometrie & de calcul. Il faut se servir des distances connues de la Terre au Soleil dans les trois observations, prendre entré les lignes tirées de la Terre à la Comete d'autres lignes proportionnelles aux arcs décrits par la Terre sur son Orbe d'une observation à l'autre, ou aux tems écoulés, &c. Enfin tout cela fait, M. Cassini trouve la Comete entre Mars & Jupiter, comme il l'avoit déjà avancé en 1729. Il seroit inutile d'avertir que si nous n'avons supposé ici que trois observations, ce n'a été qu'afin de réduire tout au plus simple: un Astronome qui en a un plus grand nombre, ne manque certainement pas de les employer, sur-tout dans des déterminations très délicates & très épineuses. M. Cassini croit qu'en posant la distance moyenne de la Comete au Soleil un peu plus de quatre fois plus grande dans les six mois qu'on l'a apperçue, que celle de la Terre, il approche presque autant du vrai que l'on ait fait pour la distance d'aucune Planete. On n'a peut-être pas vu jusqu'à présent de Comete dont la distance soit aussi exactement trouvée.

La même méthode, qui fournit la distance par le moyen des trois observations supposées, fournit aussi l'inclinaison, & par conséquent

quent la longueur de la route de la Comete entre les deux paralleles & la 3<sup>me</sup> ligne inclinée, pourvu que cette route soit une ligne droite; & cette ligne qui se trouve nécessairement divisée en deux parties, donne par le rapport de ces parties celui du mouvement de la Comete entre les observations, pourvu que ce mouvement soit uniforme. Mais ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne se trouve dans la réalité; on peut cependant les supposer légitimement toutes deux, & dans une fort petite portion de l'Orbe de la Comete, & dans un tems fort court par rapport à celui de sa révolution entiere. Or on est toujours, ou bien on peut aisément se mettre dans l'un & l'autre de ces deux cas.

Cette méthode n'est donc bonne que pour trouver le mouvement de la Comete, qui a répondu à trois observations, par ex. peu éloignées. Si l'on en prenoit trois autres peu éloignées entre elles, mais éloignées des premières, on trouveroit une autre quantité de mouvement, de même qu'en prenant la Comete dans des points de son cours éloignés, on lui trouvera différentes distances au Soleil & à la Terre.

Les distances de la Comete au Soleil & plus précisément à la Terre, font varier l'apparence de son mouvement; une plus grande proximité la rend plus grande, & au contraire: mais les distances au Soleil doivent faire varier le mouvement réel comme celui des Planetes, si les Cometes sont des Planetes Solaires; & il se trouve dans la Comete dont il s'agit, que la difference de son mouvement,

vu en deux points éloignés de son cours, a été double de la différence de sa distance au Soleil dans ces mêmes points, ainsi qu'on le trouve précisément dans les Planetes les mieux connues. Une moitié de cette différence du mouvement observé n'étoit qu'apparente, & due à une distance, moindre, si l'on veut; l'autre moitié étoit réelle, & véritablement causée par cette distance, parce qu'elle étoit moindre.

Si la Comete dans le tems qu'elle a été visible a été 4 fois plus éloignée du Soleil que la Terre, & si l'on suppose que dans la Région du Ciel, ou dans la couche du Tourbillon Solaire où elle se trouvoit, elle ait pris la vitesse qui selon la Règle de Kepler conviendrait à une Planete placée au même lieu, on verra sans peine que sa vitesse réelle devoit être 2 fois moindre que celle de la Terre, car ces vitesses réelles des Planetes sont en raison renversée des racines quarrées de leurs distances au Soleil; or ici la distance de la Terre étant 1, celle de la Comete est 4, dont la racine est 2. Si la Terre qui fait sur son Orbe un degré en 24 heures, avoit 2 fois moins de vitesse, elle ne feroit que 30', donc la Comete avec cette même vitesse employée à parcourir un Orbe 4 fois plus grand que celui de la Terre ne doit faire en 24 heures que le quart de 30', ou 7' 30'.

Cependant M. Cassini par ses calculs trouve ce même mouvement de 9' 40'', ce qui est trop différent pour la précision dont l'Astronomie est aujourd'hui: mais ce qui rectifie & corrige cette difference, c'est qu'en suppo-

posant que la Comete parcouroit une Ellipse, ainsi qu'il est nécessaire si c'étoit une Planete, il suit de cette figure qu'au tems de sa premiere apparition elle avoit un peu passé son Périhélie & alloit à une de ses moyennes distances, où par conséquent son mouvement, qui est alors véritablement le moyen, & réel, eut été moindre que  $9' 40''$ . En suivant l'idée de l'Ellipse M. Cassini détermine le mouvement dans l'Aphélie d'un peu moins de  $4'$ , & de tout cela résulte pour tout l'Orbe le véritable mouvement moyen de  $6'$ .

M. Cassini n'ose déterminer absolument l'espece de l'Ellipse que décrit la Comete, parce qu'il ne juge pas que dans les différentes observations les distances au Soleil, qui seroient un fondement nécessaire, ayent pu être connues avec une assez grande précision. Il ne laisse pas néanmoins de croire qu'on représentera assez exactement son cours en supposant que sa moyenne distance au Soleil est à celle de la Terre comme 24 à 5. Il suit de-là que sa révolution entiere est d'environ 10 années selon la Règle de Kepler, à laquelle cette Comete se trouve merveilleusement conforme; ce qui est & une nouvelle gloire pour la Règle qui ne s'étendoit pas encore jusque-là, & une forte preuve que quelques Cometes tout au moins sont des Planetes Solaires.

L'inclinaison de l'Orbe de cette Comete sur le plan de l'Ecliptique est, selon les calculs de M. Cassini, de plus de 76 degrés, ce qui excède de beaucoup la plus grande inclinaison de toutes les Planetes connues, cel-

le

le de Mercure, qui n'est que de 7 : mais il ne sera pas étonnant qu'une Comete, qui quoique Planete Solaire setoit toujours d'une condition differente des autres, s'en écarte beaucoup à quelques égards, qui ne changeroient rien à leur nature générale. Le Nœud de son Orbite avec l'Ecliptique a été entre le 10 & le 11<sup>me</sup> degré d'Aquarius.

Selon son mouvement & le tems de sa révolution déterminés par M. Cassini, elle a dû se retrouver en opposition avec le Soleil au mois de Sept. 1730, tems le plus favorable pour l'observer, si elle a pu l'être : mais elle ne l'a pu, apparemment parce qu'elle étoit alors trop éloignée de la Terre. Il ne faut pas s'attendre que tout s'accorde si promptement à donner un système général des Cometes, ni même celui d'aucune Comete en particulier. Des Philosophes trop impatiens auroient à revenir sur leurs pas.



## SUR UNE OBSERVATION

*de l'Eclipse de Lune du 8 Août 1729, faite  
à la Nouvelle Orléans dans la Louisiane.*

L'ECLIPSE totale de Lune du 8 Août 1729, dont les observations faites à Paris ont été rapportées dans les Mémoires de cette même année \*, fut aussi observée à la Nouvelle Orléans dans la Louisiane par M. Ba-

\* p. 487. & 489.

Baron, envoyé dans ce Pays-là par le Roi pour des recherches d'Histoire-Naturelle & des Observations Astronomiques. Nous rendons particulièrement compte de celle-ci, parce qu'elle servit à décider une difficulté qui s'étoit élevée dans l'Académie.

Le P. Laval, dans son voyage de la Louisiane en 1720, avoit donné par ses observations la différence de Longitude entre Paris & l'Isle Dauphine, située à l'embouchure de la Riviere de la Mobile, plus petite de 11 degrés que celle de la Carte d'Amérique de M. Delisle, publiée en 1722. Le P. Laval se tenoit sûr de l'exactitude de son observation, & son habileté n'étoit pas contestée; celle de M. Delisle ne l'étoit pas non plus, & il étoit armé d'un grand nombre de raisons très fortes, qu'il exposa à l'Académie; & ils différoient tous deux à tel point, qu'on ne pouvoit les concilier en supposant que l'un ou l'autre seroit tombé dans quelque légère erreur.

Enfin le doute fut levé par l'Eclipse dont il s'agit. Elle fut vue à Paris pendant toute sa durée, & à la Nouvelle Orléans vers sa fin seulement; & M. Cassini ayant comparé les tems des Phases observées par lui & par M. Baron, ou s'étant servi de quelques autres observations faites en France, a trouvé qu'il en résultoit entre les deux Lieux une différence de Méridiens assez conforme à celle que M. Delisle avoit posée.

Nous



**N**ous renvoyons entierement aux Mémoires

\* L'Ecrit de M. Godin sur la solution d'un Problème, d'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes.

† L'Observation de M. Cassini de l'Eclipse Solaire du 15 Juillet.



## G E O G R A P H I E.

**M**BUACHE, employé à travailler au Dépôt des Cartes de la Marine établi en 1721, ayant profité pour l'avancement de la Géographie de tout ce qu'il avoit sous les yeux, apporta à l'Académie une Carte qu'il avoit dressée du Golphe de Mexique & des Isles de l'Amérique. Cette partie du Nouveau Monde est la plus fréquentée par les Navigateurs François, & les erreurs des Cartes en deviennent d'autant plus dangereuses. Celle de Pieter Goos, dont les Pilotes se servent ordinairement, se trouva par les recherches de M. Buache assez éloignée du vrai. Il rendoit sensible à l'œil par des contours d'une couleur differente, combien elle differoit de la nouvelle Carte. Celle-ci differoit mè-

\* V. les M. p. 33.

† V. les M. p. 643.

même assez considérablement de la Carte du Mexique de feu M. Delisle, mais beaucoup moins de la dernière Edition en une feuille de l'Amérique du même Auteur. M. Buache faisoit gloire d'être Disciple de M. Delisle, mais il avoit eu l'avantage de travailler sur quantité de Mémoires que le Maître n'avoit pas connus. Plus on en a devant soi, plus on peut approcher de la vérité dans les déterminations; mais aussi le travail se multiplie à proportion, par le grand nombre d'attentions, de réflexions, & de combinaisons nécessaires.

Nous renvoyons entièrement aux Mémoires

\* Les Remarques de M. de Mairan sur la comparaison de Paris & de Londres.

\* V. les M. p. 801.

## MECHANIQUE.

### SUR LES VOÛTES \*.

M. COUPLET continue la Théorie des Voûtes, qu'il n'avoit donnée en 1729 †, que dans l'Hypothèse purement géométrique &

\* V. les M. p. 167. † V. l'Hist. de 1729. p. 103. & suiv. G



& réellement fausse, que les Vouffoirs fussent parfaitement polis. Ici il reprend la réalité, les Vouffoirs s'engrènent par leurs surfaces les uns dans les autres, & il y faut même ajouter ce qui n'est pas tout-à-fait réel, qu'ils s'engrènent de façon à ne pouvoir céder à aucune force, dont l'effet ne seroit que de faire glisser une surface sur une autre; car la Géométrie ne peut jamais s'allier à la Méchanique, qu'en y supposant quelque chose de plus absolu & de plus précis que le vrai.

Une Voûte étant construite, dont je suppose pour plus de facilité que l'intrados & l'extrados sont deux demi-Cercles concentriques, si l'on conçoit une ligne tirée du milieu de la Clef sur un pied-droit, & qui représentera l'action ou l'effort de la Voûte sur ce pied-droit, cette ligne en cas qu'elle passe toute entière dans l'épaisseur de la Voûte, fera deux effets differens, selon l'hypothese des Vouffoirs polis, ou non polis. Dans l'une & l'autre hypothese, elle est nécessairement inclinée au pied-droit; mais dans la premiere, elle fera glisser le dernier Vouffoir par ce qu'elle a d'horizontal dans son effort, & le Vouffoir auroit besoin d'une pesanteur infinie pour lui résister; mais dans la 2<sup>de</sup> hypothese, elle ne peut le faire glisser, & à cet égard la Voûte seroit inébranlable. Que si la ligne n'étoit pas toute entière dans l'épaisseur de la Voûte, & qu'elle coupât le Quart de Cercle de l'intrados, il est visible que l'action de la Voûte manquant d'appui dans une partie de son étendue, & tombant,

pour

pour ainsi dire, à vuide, la Voûte se démentiroit aisément.

Dans cette 2<sup>de</sup> hypothese où le dernier Vouffoir ne peut glisser sur le pied-droit, il ne laisse pas pour cela de pouvoir être renversé du dedans de la Voûte en dehors, & c'est ce qu'il y a ici de plus important à expliquer.

M. Couplet partage en quatre Vouffoirs égaux la Voûte demi-circulaire, que nous avons supposée. Il suffit d'en considérer une moitié, qui n'a donc que deux Vouffoirs. Le 1<sup>er</sup> Vouffoir ou le supérieur tend à tomber par une ligne verticale tirée de son centre de gravité. Cette verticale est la diagonale d'un parallélogramme, dont deux côtés sont horizontaux, & les deux autres inclinés à l'horizon. Des deux horizontaux, le supérieur ne fait que pousser selon sa direction le 1<sup>er</sup> Vouffoir de l'autre moitié de la Voûte, qui lui résiste avec un effort égal, l'horizontal inférieur pousse le 2<sup>d</sup> Vouffoir sur lequel le 1<sup>er</sup> est posé, & le pousse de façon qu'il tend à le renverser du dedans de la Voûte en dehors. Les deux côtés inclinés du parallélogramme n'agissent que par ce qu'ils ont de vertical, & par-là ne tendent qu'à affermir le 2<sup>d</sup> Vouffoir sur le pied-droit, & par conséquent le 1<sup>er</sup> Vouffoir ne tend à renverser le 2<sup>d</sup> qu'autant qu'il a un effort horizontal plus grand que le vertical. D'un autre côté le 2<sup>d</sup> Vouffoir tend à tomber en dedans de la Voûte selon une verticale tirée de son centre de gravité, & cet effort est contraire à celui que le 1<sup>er</sup> Vouffoir fait contre lui. Il faut pour

l'équilibre, que ces deux efforts opposés, ou plutôt ces deux énergies, soient égales; je dis *énergies*, parce que tout effort se rapportant à un point fixe auquel il se dirige, il faut considérer la distance de la direction de chaque effort à ce point fixe, ou, ce qui est le même, son bras de levier, toujours, comme l'on fait, d'autant plus avantageux qu'il est plus long.

Une Voûte, telle qu'on l'a supposée, demande donc pour être bien construite, & aussi durable qu'elle peut l'être, que cet équilibre se trouve entre les deux Vouffoirs de chacune de ses moitiés. Il ne peut s'y trouver, sans mettre une certaine proportion entre les parties de la Voûte; si elle est d'une certaine ouverture, ou pour parler plus précisément, si le diamètre du demi-Cercle de son intrados est d'une certaine grandeur, il faudra qu'elle ait une certaine épaisseur, ou que son intrados & son extrados soient à une certaine distance l'un de l'autre; & comme ce sont ici deux demi-Cercles concentriques, cette distance sera par-tout égale. Il est visible qu'elle sera en même tems la moindre qu'il se puisse, & que la Voûte n'aura que l'épaisseur absolument nécessaire, puisque tout dépendra de l'équilibre des Vouffoirs, qui consiste en un point indivisible. M. Couplet cherche par l'Algebre quelle sera cette épaisseur de la Voûte, tout le reste étant connu, & il ne parvient à cette détermination que par des calculs qui, sans tomber dans les grandes difficultés de l'Art, sont cependant fort longs & fort pénibles. Si le dia-  
me-

mètre de l'intrados est de 28. pieds, l'épaisseur uniforme de la Voûte sera de 1 pied & environ  $\frac{1}{2}$ .

Mais si on suppose que la Voûte, au-lieu d'être formée de deux demi-Cercles concentriques, ou de deux arcs de 180 degrés, le soit de deux arcs de 120 seulement, & que son ouverture où la corde de l'intrados soit encore de 28 pieds, on trouvera que l'épaisseur uniforme sera beaucoup moindre; & la raison en est que les leviers par lesquels agiront les efforts des Voussoirs inférieurs seront plus longs, & que par conséquent les poids absolus n'auront pas besoin d'être si grands; ce qui emporte une moindre épaisseur de la Voûte.

En effet, si l'on conçoit une Voûte formée de quatre Voussoirs, comme celles que nous considérons ici, mais infiniment plate, de sorte que l'étendue, tant de l'intrados, que de l'extrados, soit égale à la corde de l'intrados, à 28 pieds, si l'on veut; & si l'on conçoit encore dans les Voussoirs les mêmes efforts que dans les précédents; on verra sans peine que ces efforts rapportés à leurs points fixes, agiront par des bras de levier plus longs qu'en toute autre supposition, & que si on vient à courber l'intrados & l'extrados en augmentant leur longueur, mais en conservant l'ouverture ou corde de 28 pieds, les bras de leviers s'accourciront toujours, à mesure que la courbure sera plus grande. De deux Voûtes, qui, sur une même ouverture ou corde de l'intrados, ont l'une 120 degrés, l'autre 180, la première est certainement la

d'où le Corps est tombé, ou, ce qui est le même, s'exprime par cette racine. Donc la racine de 14 exprime la vitesse acquise à la fin de la 1<sup>re</sup> Seconde par le Corps dont le mouvement s'est toujours accéléré, & 28 exprime la vitesse qu'il auroit pendant chaque Seconde, s'il prenoit un mouvement uniforme dont la vitesse fût égale à celle du dernier instant de sa chute.

Ce rapport de la racine de 14 & de 28 n'est pas seulement pour une chute faite en une Seconde, il se retrouvera encore dans toutes les autres. Que le Corps soit tombé pendant 2 Secondes, il aura parcouru 4 fois 14 pieds, & la racine de cette nouvelle hauteur d'où il sera tombé est 2 fois la racine de 14. D'un autre côté sa vitesse acquise à la fin de la nouvelle chute sera double de la vitesse de la première; donc la vitesse uniforme, qu'on suppose toujours qu'il prendra, sera 2 fois 28. Or 2 racines de 14, & 2 fois 28, ont le même rapport que la racine de 14 & 28. Il en ira de même si le Corps tombe pendant 3 Secondes, pendant 4, &c. Donc la Règle de M. Pitot est vraie, que la vitesse acquise par une chute faite d'une hauteur quelconque, ou, ce qui est le même, la racine de cette hauteur, est à la vitesse uniforme que le Corps prendroit ensuite, comme la racine de 14 à 28.

De-là il suit évidemment, que si une Eau qui est tombée d'une hauteur quelconque vient ensuite à couler horizontalement ou à peu près, & par conséquent d'un mouvement uniforme, le quarré de sa vitesse uniforme est

est égal à 56 fois la hauteur d'où elle est tombée. On voit assez tout ce qui se peut tirer de cette formule générale.

On conçoit toujours que la quantité de l'Eau qui sort, ou plus précisément, tombe d'un Réservoir ou d'un Tuyau, est plus grande en même raison que sa vitesse, qui dépend de la hauteur d'où elle tombe, est plus grande; & de-là vient que si on oppose à cette eau tombante une surface perpendiculaire à la direction de sa chute, elle fait sur cette surface une impression, qui est selon le carré de sa vitesse. Mais, ce qu'on n'auroit peut-être pas cru, cette proposition reçue de tous les Mécaniciens n'est vraie qu'avec une modification, tant ces matieres-là sont délicates, & tant en général toutes celles qui sont examinées de près le deviennent. Si on prend l'eau à sa sortie du Réservoir ou du Tuyau, & qu'on lui oppose une surface, la proposition sera exactement vraie, & la quantité d'eau d'autant plus grande que sa vitesse à sa sortie sera plus grande: Si on ne lui oppose la surface que plus loin de l'ouverture par où elle sort, sa vitesse sera certainement plus grande, puisqu'elle se fera toujours accélérée hors du tuyau, & d'autant plus que l'espace parcouru dans l'air aura été plus grand; cependant il est certain aussi que la quantité d'eau ne sera pas plus grande dans ce 2<sup>d</sup> cas que dans le 1<sup>er</sup>, & ce qui le prouve bien évidemment, c'est que si après une certaine quantité d'eau écoulée, on fermoit l'ouverture du tuyau, cette eau qui en seroit sortie accéléreroit toujours sa vitesse dans l'air, &

n'en seroit pas en plus grande quantité. Que si on supposoit le tuyau prolongé jusqu'au point où se terminoit la chute de l'eau dans l'air, alors la quantité d'eau redeviendra proportionnelle à sa dernière vitesse. Quelle est cette bizarrerie apparente? Quelle est, comme dit M. Pitot, la vertu des parois du tuyau pour rendre la quantité d'eau plus grande? Voici le dénouement qu'on peut donner à cette difficulté.

La quantité d'eau n'est plus grande à raison de la vitesse, que quand l'eau se meut d'un mouvement uniforme, & non quand elle se meut d'un mouvement accéléré, car il est visible que pour lui faire parcourir plus vite un certain espace dans un certain tems, le mouvement accéléré ne touche point à sa quantité, & la laisse telle qu'elle étoit; au lieu que pour le même effet il est impossible que le mouvement uniforme ne fasse augmenter sa quantité. Or tant que l'eau se meut dans le tuyau, elle a un mouvement uniforme, & tombe comme un cylindre d'eau continu dont les parties supérieures & inférieures n'ont que la même vitesse, ainsi que nous l'avons dit plus au long en 1703 \*. Mais quand elle est sortie du tuyau, elle a un mouvement accéléré. La conséquence s'offre d'elle-même. Nous pouvons remarquer ici en passant, que quoique l'eau ne se meuve dans le tuyau que d'un mouvement uniforme, sa vitesse à la sortie est la même que si elle y avoit eu un mouvement accéléré, & que ce-

\* p. 153. & suiv.

celui qu'elle a ensuite en tombant dans l'air est le même que s'il étoit la continuation d'un mouvement accéléré précédent dans le tuyau.

Sur ce fondement M. Pitot ne manque pas d'avertir que quand il sera question de calculer la force d'une eau, qui étant sortie d'un réservoir aura parcouru quelque espace dans l'air avant que de choquer une surface, on se trompera, si, comme il pourroit arriver fort naturellement, on suppose sa quantité proportionnelle à la dernière vitesse acquise par sa chute; on trouvera la force plus grande qu'elle ne l'est effectivement: & afin que ce calcul soit bon, il faut prendre l'eau à sa sortie du réservoir, ou si proche que la différence puisse être négligée.

Après tout cela, M. Pitot applique sa Théorie aux Rivières. Pour les considérer géométriquement, il faut supposer d'abord des choses qui ne se trouvent pas dans la réalité; que leurs lits sont formés de trois plans droits & uniformes, l'un inférieur incliné à l'Horizon, les deux autres verticaux; que l'inclinaison de l'inférieur est par-tout la même; & qu'enfin une Rivière n'en reçoit point d'autre. Voici ce qui s'ensuivroit de ces Hypothèses.

1°. Il seroit très aisé de trouver quelle seroit la dernière vitesse de la Rivière, celle avec laquelle elle se présenteroit pour entrer dans la Mer, pourvu que l'on connût la pente ou l'inclinaison de son lit. Cette vitesse seroit exprimée par la racine de la hauteur, qu'auroit la source de la Rivière à l'égard du niveau de la Mer.



20. Comme la vitesse des Rivières s'accéléroireroit toujours, elles ne demanderoient toujours qu'un lit moins large, parce que la même quantité d'eau mûe plus vite peut passer dans un tems égal par un espace plus étroit; & comme elles se font leurs lits elles-mêmes, elles n'en auroient donc que d'ainfi conditionnés.

Ceci n'est point contraire à ce qui a été dit ci-dessus, que le mouvement accéléré n'augmentoît point la quantité d'eau. Il s'agissoit d'un mouvement vertical, ici c'est un mouvement incliné, dans la composition duquel entre l'horizontal uniforme aussi-bien que le vertical accéléré. Comme ils sont liés ensemble, l'horizontal devient plus grand avec le vertical.

30. Ce qu'on a dit de la largeur des lits, il faut le dire de la profondeur, elle diminueroit toujours.

40. Les Rivières seroient toujours plus étroites, moins profondes, & plus rapides, à mesure qu'elles avanceroient dans leur cours.

Heureusement pour nous; c'est le contraire dans la Nature. Les Rivières seroient très-peu navigables, soit à cause de leur trop grande rapidité, soit à cause du peu de profondeur. Les inégalités tant de leurs bords que de leur fond, les frottemens qu'elles y souffrent, ralentissent beaucoup la vitesse qu'elles auroient naturellement, & dans l'état, pour ainsi dire, géométrique. Nous avons expliqué dans un assez grand détail en 1710 \*

com-

\* p. 159. & suiv.

comment elles élargissent nécessairement leur lit, & en même tems le creusent de manière à en rendre le fond presque horizontal.

M. Pîtot ajoute une nouvelle considération, c'est l'entrée des Rivières dans la Mer. En supposant une surface plane mise entre deux fluides qui la poussent avec des directions contraires, & des vitesses inégales, il est certain qu'elle entrera avec une certaine vitesse dans le fluide dont la vitesse est la moindre: il trouve l'expression algébrique de la vitesse de la surface; c'est la même que celle d'un fleuve plus rapide qui entreroit dans un plus lent, dont le cours seroit directement opposé. Mais comme la Mer n'a point de cours, il faut supposer nulle la vitesse moindre du second fleuve, & alors la formule donne précisément pour la vitesse du fleuve qui entre dans la Mer, la moitié de celle qu'il avoit quand il a rencontré la Mer.

Quand un fleuve est arrivé de sa source au quart de son cours, il a, selon le système de Galilée, la moitié de la dernière vitesse qu'il aura à son embouchure. Donc, suivant ce qui vient d'être dit, il a la même vitesse, & au quart de son cours, & à l'extrémité; donc il ne peut pas y avoir grande variation dans tout l'entre-deux, le cours devient assez horizontal, & le mouvement assez uniforme. La Mer est un obstacle qui attend toujours le fleuve, arrête & suspend les eaux jusqu'à un certain point, & a une espèce d'effet rétroactif qu'il n'est pas difficile de comprendre.



*MACHINES OU INVENTIONS*  
*APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE*  
*EN M. DCCXXX.*

## I.

**U**N E espece de Martinet de Forge présenté par M. Compagnot, pesant 300 livres, que deux Hommes élèvent assez facilement, par la disposition des pieces de la Machine, & qui retombe ensuite par son propre poids. On a trouvé assez ingénieuse la maniere dont la force des Hommes est appliquée, aussi-bien que celle dont agissent deux Etriers de fer, qui engagent & laissent échapper alternativement le Martinet. Le reste a paru conforme à la plupart des Machines où l'on employe le secours des Hommes. On a cru que cette Machine pourroit être utile dans les endroits où il est absolument impossible de se servir du cours des Rivières, mais non pas pour élever des Eaux, ou faire mouvoir differens Moulins.

## I I.

Une Machine arithmétique de M. de Boissendeau, qui a assuré qu'il ne connoissoit point celle de M. Pascal, & qui étoit effectivement assez jeune pour n'en avoir pas encore

core entendu parler. On a trouvé beaucoup de génie & d'industrie dans l'invention & dans l'exécution. Les mouvemens sont simples & doux. Les opérations arithmétiques se font sans qu'il soit besoin de rein écrire; on pourroit même operer sur toutes sortes de fractions, au moyen d'un changement de Roue aisé à faire sur le champ.

## III.

Un Flambeau ou Chandelier présenté par M<sup>lle</sup> du Château, dont la Bobeche est garnie d'un fond mobile, qui se hausse ou se baisse, en faisant tourner la tige brisée, qui y est adaptée, le tout pour pousser à volonté la Chandelle que l'on y enfonce, soit pour l'en ôter aisément, soit pour la faire bruler jusqu'au bout. Quoique l'on ait déjà appliqué la même Mécanique à des Canifs, & autres Outils pour un semblable usage, ce Chandelier a paru simple, & utile.



## E L O G E

DE M. DE VALINCOURT.

**J**EAN-BAPTISTE HENRI DU TROUSSET DE VALINCOURT, naquit le 1<sup>er</sup> Mars 1653, de Henri du Troussel, & de Marie du Pré. La famille étoit noble & honorable, originaire de St. Quentin en Picardie. Ayant perdu son Pere à l'âge de 6 ou 7 ans, il demeura entre les mains d'une Mere propre à remplir seule tous les devoirs de l'éducation de ses Enfants.

Il ne brilla point dans ses Classes; ce Latin & ce Grec qu'on y apprend n'étoient pour lui que des sons étrangers, dont il chargeoit sa mémoire, puisqu'il le falloit: mais ses Humanités finies, s'étant trouvé un jour seul à la Campagne avec un TERENCE pour tout amusement, il le lut d'abord avec assez d'indifférence, & ensuite avec un goût, qui lui fit bien sentir ce que c'étoit que les Belles-Lettres. Il n'avoit point été piqué de cette vanité si naturelle de surpasser ses compagnons d'étude, sans savoir à quoi il étoit bon de les surpasser; mais il fut touché de la valeur réelle & solide, jusque là inconnue, de ce qu'on avoit proposé à leur émulation. Déjà sa raison seule avoit droit de le remuer.

Il répara avec ardeur la nonchalance du temps passé, il se mit à se nourrir avidement de

de la lecture des bons Auteurs anciens & modernes. Il lui échapa quelques petits Ouvrages en Vers, fruits assez ordinaires de la jeunesse de l'Esprit, qui est alors en sa fleur, s'il en doit avoir une. M. de Valincourt ne regardoit pas ses Vers assez sérieusement, pour en faire parade, ni même pour les délaouer. Il a conservé jusqu'à la fin l'habitude de cette langue, qu'il ne parloit qu'à l'oreille de quelques Amis, & en badinant.

La fameuse Princesse de Cleves ayant paru, Ouvrage d'une espece qui ne peut naître qu'en France, & ne peut même y naître que rarement, M. de Valincourt en donna une Critique en 1678, non pour s'opposer à la juste admiration du Public, mais pour lui apprendre à ne pas admirer jusqu'aux défauts, & pour se donner le plaisir d'entrer dans des discussions fines & délicates. Ce dessein intéressoit le Censeur à faire valoir lui-même, comme il a fait, les beautés, au travers desquelles il avoit su démêler les imperfections. Au-lieu de la bile ordinaire, il répand dans son discours une gayeté agréable; & peut-être seulement pourroit-on croire qu'il va quelquefois jusqu'au ton de l'Ironie, qui, quoique léger, est moins respectueux pour un Livre d'un si rare mérite, que le ton d'une Critique sérieuse, & bien placée.

On répondit avec autant d'aigreur & d'amertume, que si on avoit eu à défendre une mauvaise cause. M. de Valincourt ne repliqua point. Les honnêtes-gens n'aiment point à s'engager dans ces sortes de combats, trop desavantageux pour ceux qui ont les mains

maines liées par de bonnes mœurs, & par les bienféances; & le Public lui-même, malgré sa malignité, se lasse bien-tôt de ce spectacle. Après avoir vu une ou deux Joûtes, il laisse les deux Champions se battre sur l'Arene sans témoins.

Un homme de mérite n'est pas destiné à n'être qu'un Critique, même excellent, c'est-à-dire, habile seulement à relever des défauts dans les productions d'autrui, impuissant à produire de lui-même. Aussi M. de Valincourt se tourna-t-il bien vîte d'un autre côté plus convenable à ses talens, & à son caractère. Il donna en 1681, la *Vie de François de Lorraine Duc de Guise*, petit morceau d'Histoire, qui remplit tout ce qu'on demande à un bon Historien; des recherches qui, quoique faites avec beaucoup de soin, & prises quelquefois dans des sources éloignées, ne passent point les bornes d'une raisonnable curiosité; une narration bien suivie, & animée, qui conduit naturellement le Lecteur, & l'intéresse toujours; un stile noble & simple, qui tire ses ornemens du fond des choses, ou les tire d'ailleurs bien finement; nulle partialité pour le Héros, qui pouvoit cependant inspirer de la passion à son Ecrivain.

Un Avertissement de l'Imprimeur à la tête de ce petit Livre annonce d'autres Ouvrages du même genre, & sans doute de la même main; mais M. de Valincourt n'eut pas le loisir de les finir: l'illustre Evêque de Meaux, qui ordinairement fournissoit aux Princes les gens de mérite dans les Lettres, dont ils avoient besoin, le fit entrer en 1685 chez M.

le Comte de Toulouse, Amiral de France. Ce ne fut encore qu'en qualité de Gentilhomme attaché à sa suite, mais quelque tems après le Secrétariat général de la Marine étant venu à vaquer, il fut donné à M. de Valincourt. Le Prince le fit aussi Secrétaire de ses Commandemens, & quand S. A. S. eut le Gouvernement de Bretagne, ce fut encore un nouveau fonds de travail pour le Secrétaire, dont les occupations se multiplioient à proportion des dignités de son Maître. Ses anciennes études l'avoient préparé, sans qu'il y pensât, à des fonctions si importantes; les nouvelles connoissances dont il eut besoin entrèrent plus aisément, & se placèrent mieux dans un esprit où elles en trouvoient déjà d'autres, qu'elles n'eussent fait dans un esprit entierement vuide.

Lorsqu'en 1704, M. l'Amiral gagna la Bataille de Malaga contre les Flottes Angloise & Hollandoise jointes ensemble, M. de Valincourt, qui n'étoit point Officier de Marine, & ne prétendoit nullement aux récompenses militaires, fut toujours à ses côtés, jusqu'à ce qu'il eut reçu une blessure à la jambe, de l'éclat d'un coup de Canon, qui tua un Page. Cet attachement si fidele, porté jusqu'aux occasions où il étoit si périlleux, & en même tems tout-à-fait inutile, avoit pour objet un Maître, qui savoit se faire aimer, & dont la justice & la droiture feroient un mérite & un nom à un homme du commun. Aussi M. de Valincourt a-t-il été honoré de la même confiance & des mêmes bontés, sans interruption, sans trouble, sans



sans effuyer aucun orage de Cour, sans en craindre, & cela pendant 45 ans. Cependant il n'étoit point flateur, un Prince du même Sang lui rend hautement ce témoignage. Il est vrai qu'il avoit un art de dire la vérité, mais enfin il osoit la dire, & l'adresse ne servoit qu'à rendre le courage utile. Peu à peu la nécessité d'employer cette adresse diminua, & les droits de l'homme de bien se fortifient toujours.

Tout le tems, que les emplois de M. de Valincourt lui laissoient libre, étoit donné à des études de son goût, & principalement à celles qui avoient rapport à ses emplois, car son devoir déterminoit assez son goût. La Marine tient à la Physique, & encore plus essentiellement aux Mathématiques, & il ne manqua pas d'ajouter aux Belles-Lettres, qui avoient été sa première passion, ces Sciences plus élevées & plus abstraites. Ainsi il se trouva en état de remplir dignement une place d'Honoraire, à laquelle l'Académie le nomma en 1721. Il étoit de l'Académie Francoise dès 1699. Je l'ai vu dans l'une & dans l'autre, j'ai été témoin de sa conduite, & de ses sentimens. Il ne croyoit pas que ce fût assez de voir son nom écrit dans les deux Listes; qu'il en retireroit toujours, sans y rien mettre du sien, l'honneur qui lui en pouvoit revenir; que tout le reste lui devoit être indifférent; & que des titres, qui par eux-mêmes laissent une grande liberté, laissent jusqu'à celle de ne prendre part à rien. Il avoit pour ces Compagnies une affection sincère, une vivacité peu commune pour leurs

leurs intérêts ; & en effet une Académie est une espece de Patrie nouvelle, que l'on est d'autant plus obligé d'aimer, qu'on l'a choisie : mais il faut convenir que ces obligations délicates ne sont pas pour tout le monde.

Il avoit travaillé toute sa vie à se faire dans une Maison de campagne qu'il avoit à St Cloud, & où il se retiroit souvent, une Bibliotheque choisie. Elle montoit à 6 ou 700 Volumes, lorsqu'elle fut entièrement consumée, il y a près de 5 ans, par le feu qui prit à la Maison : ses Recueils, fruits de toutes ses lectures, des Mémoires importans sur la Marine, des Ouvrages, ou ébauchés ou finis, tout périt en même tems, & il en fut le spectateur. La Philosophie, qui auroit été plus rigide sur une perte de biens, lui permettoit d'être sensiblement affligé de celle d'un Trésor amassé par elle-même, & où elle se complaisoit ; mais son courage ne se démentit point : *Je n'aurois guere profité de mes Livres*, disoit-il, *si je ne savois pas les perdre*. Il étoit encore soutenu par une Philosophie bien supérieure, par la Religion, dont il fut toujours vivement pénétré.

Vers la fin de sa vie il fut de tems en tems attaqué de diverses maladies, qui le mirent encore à de plus grandes épreuves. Enfin il mourut le 4 Janv. 1730, âgé de 77 ans.

On s'appercevoit aisément dans son commerce ordinaire, qu'il étoit plein de bonnes lectures. Il en ornoit volontiers sa conversation & ses lettres, mais à propos, avec nouveauté, avec grace, conditions nécessaires, & peu observées. Un certain sel qu'il avoit

avoit dans l'esprit, l'eût rendu fort propre à la raillerie, mais il s'est toujours défendu courageusement l'usage d'un talent dangereux pour qui le possède, injuste à l'égard des autres.

Il a été ami particulier de la plupart de ceux qui ont brillé dans les Lettres, principalement de M<sup>rs</sup> Racine & Despréaux, & par cette raison il fut choisi après la mort de M. Racine pour être associé à M. Despréaux dans le travail ou le dessein de l'Histoire du feu Roi. Apparemment sa liaison avec ce grand Satirique lui fit adopter quelques-uns de ses jugemens, tels que celui qu'il portoit contre le premier de nos Poètes Lyriques ; jugement insoutenable sur le Parnasse, & recevable seulement dans un Tribunal infiniment plus respectable, où le Satirique lui-même n'eût pas d'ailleurs trouvé son compte. Cependant M. de Valincourt ne se laissa point emporter à l'excessive chaleur que mirent ses Amis dans des disputes littéraires, qui ont fait assez de bruit. Il continua de vivre en amitié avec ceux qui refusoient l'adoration aux Anciens, il négocia même des reconciliations, & donna des exemples rares de moderation & d'équité, quoique dans une bagatelle.

Mais il n'a pas eu seulement des amis dans les Lettres, il en a eu dans les premières places de l'Etat, non pas simplement comme un homme d'esprit dont la conversation peut délasser, mais comme un homme d'un grand sens, à qui on peut parler d'affaires. Il ne s'est jamais fait valoir de ces commerces si  
- flatteurs

flatteurs & si dangereux pour la vanité, il les cachoit autant qu'il étoit possible; & ce qu'il cachoit encore avec plus de soin, c'est l'usage qu'il en a fait toutes les fois que la justice ou le mérite ont eu besoin de son crédit.

Il n'étoit point marié, & jouissoit d'un revenu considérable. Sa famille publie hautement sa générosité pour elle, & ses bienfaits toujours prévenans: mais elle craindroit d'offenser sa vertu, & d'aller contre ses intentions, si elle révéloit ce qu'il a fait d'ailleurs par des motifs plus élevés.



## E L O G E

DE M. DU VERNEY.

**G**UICHARD-JOSEPH DU VERNEY naquit à Feurs en Forez, le 5 Août 1648, de Jacques du Verney Médecin de la même Ville, & d'Antoinette Pittre. Ses Classes faites, il étudia en Médecine à Avignon pendant 5 ans, & en partit en 1667 pour venir à Paris, où il se sentoît appelé par ses talens.

A peine arrivé dans cette grande Ville, il alla chez le fameux Abbé Bourdelot, qui tenoit des Conférences de Gens de Lettres de toutes les especes. Il leur fit une Anatomie du Cerveau, & d'autres ensuite chez M. Denys savant Médecin, où l'on s'assembloit aussi. Il démontroit ce qui avoit été décou-  
vert

vert par Sténon, Swammerdam, Graaf, & les autres grands Anatomistes, & il eut bientôt une réputation.

Outre ses connoissances déjà grandes & rares par rapport à son âge, ce qui contribua beaucoup à le mettre promptement en vogue, ce fut l'éloquence avec laquelle il parloit sur ces matieres. Cette éloquence n'étoit pas seulement de la clarté, de la justesse, de l'ordre, toutes les perfections froides que demandent les sujets dogmatiques; c'étoit un feu dans les tours, & jusque dans la prononciation, qui auroit presque suffi à un Orateur. Il n'eût pas pu annoncer indifferemment la découverte d'un Vaisseau, ou un nouvel usage d'une partie; ses yeux en brilloient de joye, & toute sa personne s'animoit. Cette chaleur ou se communique aux Auditeurs, ou du moins les préserve d'une langueur involontaire, qui auroit pu les gagner. On peut ajouter qu'il étoit jeune, & d'une figure assez agréable. Ces petites circonstances n'auront lieu, si l'on veut, qu'à l'égard d'un certain nombre de Dames, qui furent elles-mêmes curieuses de l'entendre.

A mesure qu'il parvenoit à être plus à la mode, il y mettoit l'Anatomie, qui renfermée jusque-là dans les Ecoles de Médecine, ou à St. Cosme, osa se produire dans le beau monde, présentée de sa main. Je me souviens d'avoir vu des gens de ce monde-là, qui portoient sur eux des pieces seches préparées par lui, pour avoir le plaisir de les montrer dans les Compagnies, sur-tout celles qui appartoient aux sujets les plus in-

te-

tereffans. Les Sciences ne demandent pas à conquérir l'Univers, elles ne le peuvent, ni ne le doivent ; elles font à leur plus haut point de gloire, quand ceux qui ne s'y attachent pas, les connoissent assez pour en sentir le prix & l'importance.

Il entra en 1676 dans l'Académie, qui ne comptoit encore que 10 années depuis son établissement. On crut réparer par lui la perte que la Compagnie avoit faite de M.<sup>re</sup> Gayent & Pecquet, tous deux habiles Anatomistes, mais le dernier plus fameux par la découverte du Réservoir du Chile, & du Canal Thorachique. Du caractère dont étoit M. du Verney, il n'avoit pas besoin de grands motifs pour prendre beaucoup d'ardeur. Il se mit à travailler à l'Histoire-Naturelle des Animaux, qui faisoient alors une partie des occupations de l'Académie, & il tient beaucoup de place dans l'Histoire Latine de M. du Hamel.

Quand ceux qui étoient chargés de l'éducation de M. le Dauphin, ayeul du Roi, songerent à lui donner des connoissances de Physique, on fit l'honneur à l'Académie de tirer de son corps ceux qui auroient cette fonction, & ce furent M. Roëmer pour les Expériences générales, & M. du Verney pour l'Anatomie. Celui-ci préparoit les parties à Paris, & les transportoit à St Germain, ou à Versailles. Là il trouvoit un Auditoire redoutable, le Dauphin environné de M. le Duc de Montausier, de M. l'Evêque de Meaux, de M. Huet depuis Evêque d'Avanches, de M. de Cordemoi, qui tous, en ne

*Hist.* 1730.

H

comp-

comptant pour rien les titres, quoiqu'ils faissent toujours leur impression, étoient fort favans, & fort capables de juger même de ce qui leur eût été nouveau. Les démonstrations d'Anatomie réussirent si bien auprès du jeune Prince, qu'il offrit quelquefois de ne point aller à la Chasse, si on les lui pouvoit continuer après son dîner.

Ce qui avoit été fait chez lui, se recommençoit chez M. de Meaux avec plus d'étendue & de détail. Il s'y assembloit de nouveaux Auditeurs, tels que M. le Duc de Chevreuse, le P. de la Chaize, M. Dodart, tous ceux que leur goût y attiroit, & qui se sentoient dignes d'y paroître. M. du Verney fut de cette sorte pendant près d'un an l'Anatomiste des Courtisans, connu de tous, & presque ami de ceux qui avoient le plus de mérite. Ses succès de Paris l'avoient porté à la Cour, & il en revint à Paris avec ce je ne sais quoi de plus brillant que donnent les succès de la Cour.

Les fatigues de son métier, très pénible par lui-même, & plus pénible pour lui que pour tout autre, lui causerent un mal de Poitrine si violent, qu'on lui crut un Ulcere au Poumon. Il en revint cependant, bien résolu à se ménager davantage à l'avenir. Mais comment exécuter cette résolution? Comment résister à mille choses qui s'offroient, & qui forçoient ses regards & ses recherches à se tourner de leur côté? Comment leur refuser ses nuits, même après les jours entiers? Souvent l'Anatomie ne souffre pas  
de

de délais; mais quand elle en eût souffert, en pouvoit-il prendre?

En 1679 il fut nommé Professeur d'Anatomie au Jardin Royal, & il alla en Basse-Bretagne pour y faire des dissections de Poissons, envoyé dans cette vue avec M. de la Hire, qui devoit avoir d'autres occupations. Ils furent envoyés tous deux l'année suivante sur la Côte de Bayonne, pour les mêmes desseins. Il entra dans une Anatomie toute nouvelle, mais il ne put qu'ébaucher la matière, & depuis son retour la seule structure des Oufes de la Carpe lui couta plus de tems que tous les Poissons qu'il avoit étudiés dans ses deux voyages.

Il mit les exercices Anatomiques du Jardin Royal sur un pied où ils n'avoient pas encore été. On vit avec étonnement la foule d'Ecoliers qui s'y rendoit, & on compta en une année jusqu'à 140 Etrangers. Plusieurs d'entre eux retournés dans leurs Païs, ont été de grands Médecins, de grands Chirurgiens, & ils ont semé dans toute l'Europe le nom & les louanges de leur Maître. Sans doute ils ont souvent fait valoir son autorité, & se sont servis du fameux, *il l'a dit*. Nous avons rapporté dans l'Eloge de M. Lemery \* qu'il faisoit ici en même tems des Cours de Chimie avec le même éclat. Une Nation, qui auroit pris sur les autres une certaine supériorité dans les Sciences, s'appercevroit bien-tôt que cette gloire ne seroit pas stérile, & qu'il lui en

\* V. l'Hist. de 1715. p. 98.





tez à ce fond d'embaras, que produit la nature de l'Anatomie, une peur de se méprendre, une frayeur des jugemens du Public, qui ne peut guere être excessive; & l'on concevra sans peine qu'un très habile Anatomiste peut n'avoir pas imprimé. Il faut pourtant avouer qu'un trop grand amour de la perfection, ou une trop grande délicatesse de gloire, feront perdre au Public une infinité de vues & d'idées, qui pour être d'une certaine utilité n'auroient pas eu besoin d'une entière certitude ou d'une précision parfaite.

M. du Verney fut assez longtems le seul Anatomiste de l'Académie, & ce ne fut qu'en 1684 qu'on lui joignit M. Méry\*. Ils n'avoient rien de commun qu'une extrême passion pour la même Science, & beaucoup de capacité; du reste, presque entierement opposés, sur-tout à l'égard des talens extérieurs. Si l'on pouvoit quelquefois craindre que par le Don de la parole M. du Verney n'eût la facilité de tourner les faits selon ses idées, on étoit sûr que M. Méry ne pouvoit que se renfermer dans une sévère exactitude des faits, & que l'un eût tenu en respect l'éloquence de l'autre. Le grand avantage des Compagnies résulte de cet Equilibre des caracteres. On remarqua que M. du Verney prit un nouveau feu par cette espece de rivalité. Elle n'éclata jamais davantage que dans la fameuse question de la Circulation du sang du Fœtus, dont nous avons tant parlé. Elle le conduisit à examiner d'autres sujets

\* V. l'Hist. de 1722. p. 186.

jets qui pouvoient y avoir rapport, la Circulation dans les Amphibies, tels que la Grenouille, car le Fœtus qui vit d'abord sans respirer l'air, & ensuite en le respirant, est une espèce d'Amphibie; ceux-là le conduisoient à d'autres Animaux approchant sans être Amphibies, comme le Crapaud, & enfin aux Insectes, qui font un Genre à part, & offrent un spectacle tout nouveau.

Aussi excelloit-il dans l'Anatomie comparée, qui est l'Anatomie prise le plus en grand qu'il soit possible, & dans une étendue où peu de gens la peuvent embrasser. Il est vrai que pour nous & pour nos besoins, la structure du Corps humain paroîtroit suffire; mais on le connoit mieux, quand on connoit aussi toutes les autres Machines faites à peu près sur le même dessein. Après celles-là il s'en présente d'autres d'un dessein fort différent: il y aura moins d'utilité à les étudier, à cause de la grande différence; mais par cette raison-là même la curiosité sera plus piquée, & la curiosité n'a-t-elle pas ses besoins?

Dans les premiers tems de ses exercices du Jardin Royal, il faisoit & les démonstrations des parties qu'il avoit préparées, & les discours qui expliquoient les usages, les maladies, les cures, & résolvoient les difficultés. Mais sa foiblesse de Poitrine, qui se faisoit toujours sentir, ne lui permit pas de conserver les deux fonctions à la fois. Un habile Chirurgien choisi par lui faisoit sous lui les démonstrations, & il ne lui restoit plus que les discours, dans lesquels il avoit de la  
peine

peine à se renfermer. C'est lui qui a le premier enseigné en ce lieu-là l'Ostéologie, & les maladies des Os.

De son Cabinet, où il avoit étudié des Cadavres & des Squeletes, il alloit dans les Hôpitaux de Paris, où il étudioit ceux dont les maux avoient rapport à l'Anatomie. Si la Machine du Corps dissequée & démontrée présente encore tant d'Enigmes très obscures, à plus forte raison la Machine vivante, où tout est sans comparaison moins exposé à la vue, plus envelopé, plus équivoque. C'étoit là qu'il appliquoit sa Théorie aux faits, & qu'il apprenoit même ce que la seule Théorie ne lui eût pas appris. En même tems il étoit d'un grand secours, & aux Malades, & à ceux qui en étoient chargés. Quoiqu'il fût Docteur en Médecine, il évitoit de s'engager dans aucune pratique de Médecine ordinaire, quelque honorable, quelque utile qu'elle pût être; il prévoyoit qu'un cas rare de Chirurgie, une opération singulière, lui auroit causé une distraction indispensable, & il s'acquittoit assez envers le Public de son devoir de Médecin, non-seulement par les instructions générales qu'il donnoit sur toute l'Anatomie, mais par l'utilité dont il étoit dans les occasions particulières.

Loin d'avoir rien à se reprocher sur cet article, il ne se reprochoit que d'être trop occupé de sa profession. Il craignoit que la Religion, dont il avoit un sentiment très vif, ne lui permit pas un si violent attachement, qui s'emparoit de toutes ses pensées, & de tout

son tems. L'Auteur de la Nature, qu'il admiroit & révéroit sans cesse dans ses Ouvrages si bien connus de lui, ne lui paroïssoit pas suffisamment honoré par ce culte savant, toujours cependant accompagné du culte ordinaire le plus régulier. L'âge qui s'avançoit, les infirmités qui augmentoient, contribuoient peut-être à ce scrupule, sans lui donner pourtant le pouvoir de s'y livrer entièrement.

Les mêmes raisons l'empêcherent pendant plusieurs années de paroître à l'Académie. Il demanda à être Vétéran, & sa place fut remplie par M. Petit Docteur en Médecine. Il paroïssoit avoir oublié l'Académie, lorsque tout d'un coup il se réveilla à l'occasion de la réimpression de l'Histoire-Naturelle des Animaux, à laquelle il avoit eu anciennement beaucoup de part. Il reprit à 80 ans des forces, de la jeunesse, pour revenir dans nos Assemblées, où il parla avec toute la vivacité qu'on lui avoit connue, & qu'on n'attendoit plus. Une grande passion est une espece d'Ame, immortelle à sa maniere, & presque indépendante des Organes.

Il ne perdoit aucun des intervalles que lui laissoient des souffrances, qui redoubloient toujours, & qui le mirent plusieurs fois au bord du tombeau. Il revoyoit avec M. Vinslou son Traité de l'Oreille dont il vouloit donner une 2<sup>d</sup>e Edition, qui se feroit bien sentie des acquisitions postérieures. Il avoit entrepris un Ouvrage sur les Insectes, qui l'obligeoit à des soins très pénibles; malgré son,

son grand âge, par exemple, il passoit des nuits dans les endroits les plus humides du Jardin, couché sur le ventre sans oser faire aucun mouvement, pour découvrir les allures, la conduite des Limaçons, qui semblent en vouloir faire un secret impénétrable. Sa santé en souffroit, mais il auroit encore plus souffert de rien négliger. Il mourut le 10 Sept. 1730, âgé de 82 ans.

Il étoit en commerce avec les plus grands Anatomistes de son tems, Malpighi, Ruysch, Pitcarne, Bidloo, Boerhave. J'ai vu les Lettres qu'il en avoit reçues, & je ne puis m'empêcher d'en traduire ici une de Pitcarne écrite en Latin, datée de l'an 1712, à cause de son caractère singulier.

*Très illustre du Verney, voici ce que t'écris un homme qui te doit beaucoup, & qui te rend graces de ces discours divins, qu'il a entendus de toi à Paris il y a 30 ans. Je te recommande Thomson mon ami, & Ecoissois. Je t'envoyerai bien-tôt mes Dissertations où je résoudrai ce Problème: Une Maladie étant donnée, trouver le Remede. A Edimbourg, &c. Celui qui s'élevoit à de pareils Problèmes, & dont effectivement le nom est devenu si célèbre, se faisoit honneur de se reconnoître pour Disciple de M. du Verney. On voit de plus par des Lettres de 1698, que lui qui auroit pu instruire parfaitement dans l'Anatomie un frere qu'il avoit, il l'envoyoit d'Angleterre à Paris, pour y étudier sous le plus grand Maître.*

En général il paroît par toutes ces Lettres, que la réputation de M. du Verney étoit très

brillante chez les Etrangers, non-seulement par la haute idée qu'ils remportoient de sa capacité, mais par la reconnoissance qu'ils lui devoient de ses manieres obligeantes, de l'interêt qu'il prenoit à leurs progrès, de l'affection dont il animoit ses Leçons. Ceux qui lui adressoient de nouveaux Disciples, ne lui demandoient pour eux que ce qu'ils avoient éprouvé eux-mêmes. Ils disent tous que son Traité de l'Oufé leur a donné une envie extrême de voir les Traités des quatre autres. Sens qu'il avoit promis dans celui-là; ils l'exhortent souvent à faire part à tout le Public de ses richesses; qu'il ne peut plus tenir cachées après les avoir laissé appercevoir dans ses Discours du Jardin Royal; ils le menacent du péril de se les voir enlever par des gens peu scrupuleux, & on lui cite même un exemple où l'on croit le cas déjà arrivé; mais il a toujours été ou peu sensible à ce malheur, ou trop irrésolu à force de savoir.

On lui donne assez souvent dans ces Lettres une premiere place entre tous les Anatomistes. Il est vrai que dans ce qu'on écrit à un homme illustre, il y entre d'ordinaire du compliment: on peut mettre à un haut rang celui qui n'est pas à un rang fort haut, mais on n'ose pas mettre au premier rang celui qui n'y est pas; la louange est trop déterminée, & on ne pourroit sauver l'honneur de son jugement.

Il est du devoir de l'Académie de publier un bienfait qu'elle a reçu de lui. Il lui a légué par son Testament toutes ses Préparations

tions Anatomiques, qui font & en grand nombre, & de la perfection qu'on peut imaginer. Cela joint à tous les Squeletes d'Animaux rares, que la Compagnie a depuis long-tems dans une Salle du Jardin Royal, composera un grand Cabinet d'Anatomie, moins estimable encore par la curiosité, que par l'utilité dont il sera dans les recherches de ce genre.



## E L O G E

DE M. LE COMTE MARSIGLI.

**L**OUIS FERDINAND MARSIGLI naquit à Bologne le 10 Juillet 1658, du Comte Charles François Marfigli, issu d'une ancienne Maison Patricienne de Bologne, & de la Comtesse Marguerite Cicolani. Il fut élevé par ses parens selon qu'il convenoit à sa naissance; mais il se donna à lui-même, quant aux Lettres, une éducation bien supérieure à celle que sa naissance demandoit. Il alla dès sa première jeunesse chercher tous les plus illustres Savans d'Italie; il apprit les Mathématiques de Geminiano Montanari, & d'Alphonse Borelli; l'Anatomie, de Marcel Malpighi; l'Histoire-Naturelle, des observations que son génie lui fournissoit dans ses voyages.

Mais ils eussent été trop bornés, s'ils se



fussent renfermés dans l'Italie. Il alla à Constantinople en 1679, avec le Bayle que Venise y envoyoit. Comme il se destinoit à la Guerre, il s'informa, mais avec toute l'adresse & les précautions nécessaires, de l'état des Forces Ottomanes, & en même tems il examina en Philosophie le Bosphore de Thrace, & ses fameux Courans. Il écrivit sur l'un & l'autre de ces deux sujets. Le Traité du Bosphore parut à Rome en 1681, dédié à la Reine Christine de Suede, & c'est le premier qu'on ait de lui. L'autre intitulé, *Del incremento e decremento dell' Imperio Ottomano*, doit paroître présentement imprimé à Amsterdam, avec une traduction Françoisse.

Il revint de Constantinople dès l'an 1680, & peu de tems après, lorsque les Turcs menaçoient d'une irruption en Hongrie, il alla à Vienne offrir ses services à l'Empereur Leopold, qui les accepta. Il lui fut aisé de prouver combien il étoit au dessus d'un simple Soldat par son intelligence dans les Fortifications, & dans toute la Science de la Guerre; il fit avec une grande approbation des Généraux, des Lignes & des travaux sur le Rab pour arrêter les Turcs, & il en fut récompensé par une Compagnie d'Infanterie en 1683, quand les Ennemis parurent pour passer cette Rivière. Ce fut là qu'après une Action assez vive, il tomba blessé & presque mourant entre les mains des Tartares; le 2 Juillet, jour de la Visitation; ce n'est pas sans raison que nous ajoutons le nom de cette Fête à la date du jour. Il a fait de sa cap-

ti.

tivité une Relation, où il a bien senti que l'art n'étoit point nécessaire pour la rendre touchante. Le sabre toujours levé sur sa tête, la mort toujours présente à ses yeux, des traitemens plus que barbares, qui étoient une mort de tous les momens, feront frémir les plus impitoyables ; & l'on aura seulement de la peine à concevoir comment sa jeunesse, sa bonne constitution, son courage, la résignation la plus Chrétienne, ont pu résister à une si affreuse situation. Il se crut heureux d'être acheté par deux Turcs, freres, & très pauvres, avec qui il souffrit encore beaucoup, mais plus par leur misere que par leur cruauté ; il comptoit qu'ils lui avoient sauvé la vie. Ces maitres si doux le faisoient enchaîner toutes les nuits à un pieu planté au milieu de leur chétive cabane ; & un troisieme Turc, qui vivoit avec eux, étoit chargé de ce soin.

Enfin, car nous supprimons beaucoup de détails, quoiqu'intéressans, il trouva moyen de donner de ses nouvelles en Italie, & de se faire racheter, & le jour de sa liberté fut le 25 Mars 1684, jour de l'Annonciation. Ses réflexions sur ces deux dates de sa captivité & de sa délivrance font la plus remarquable partie de son Eloge, puisqu'elles découvrent en lui un grand fonds de piété. Il conclut, & ce sont ici ses paroles, que dans deux jours où l'auguste Protectrice des Fideles est particulièrement honorée, elle lui avoit obtenu deux graces du Ciel, l'une consistoit à le punir salutairement de ses fautes passées,

l'autre à faire cesser la punition.

Remis en liberté, il alla à Bologne se montrer à ses Concitoyens, qui avoient pleuré sa mort, & qui versèrent d'autres larmes en le revoyant; & après avoir joui de toutes les douceurs d'une pareille situation, il retourna à Vienne se présenter à l'Empereur, & reprendre ses emplois militaires. Il fut chargé de fortifier Strigonie, & quelques autres Places, & d'ordonner les travaux nécessaires pour le Siege de Bude, que méditoient les Impériaux. Il eut part à la construction d'un Pont sur le Danube, ce qui lui donna occasion d'observer les ruïnes d'un ancien Pont de Trajan sur ce même Fleuve. Il fut fait Colonel en 1689.

En cette même année, l'Empereur l'envoya deux fois à Rome pour faire part aux Papes Innocent XI & Alexandre VIII, des grands succès des armes Chrétiennes, & des projets formés pour la suite.

Lorsqu'après une longue guerre, funeste aux Chrétiens mêmes qui en remportoient l'avantage, l'Empereur & la République de Venise d'une part, & de l'autre la Porte, vinrent à songer à la Paix, & qu'il fut question d'établir les Limites entre les Etats de ces trois Puissances, le Comte Marfigli fut employé par l'Empereur dans une affaire si importante, & comme un homme de guerre qui connoissoit ce qui fait une bonne Frontiere, & comme un Savant bien instruit des anciennes possessions; & comme un habile Négociateur, qui sauroit faire valoir des droits.

droits. Se trouvant sur les confins de la Dalmatie Venitienne, il reconnut à quelque distance de là une Montagne, au pied de laquelle habitoient les deux Turcs, dont il avoit été Esclave. Il fit demander dans le païs Turc s'ils vivoient encore, & heureusement pour lui ils se retrouvèrent. Il eut le plaisir de se faire voir à eux environné de Troupes qui lui obéissoient, ou le respecttoient, & le plaisir encore plus sensible de soulager leur extrême misere, & de les combler de présens. Il crut leur devoir encore sa rançon, parce que l'argent qu'ils en avoient reçu leur avoit été enlevé par le Commandant Turc, sous ce prétexte extravagant, que leur Esclave étoit un fils ou un proche parent du Roi de Pologne, qu'ils auroient dû envoyer au Grand-Seigneur. Il fit encore plus pour eux, persuadé presque que c'étoient des Libérateurs généreux, qui pour son seul intérêt l'avoient tiré des mains des Tartares. L'emploi qu'il avoit pour régler les Limites le mettant à portée d'écrire au Grand-Visir, il lui demanda pour l'un de ses deux Turcs un Timariot, bénéfice militaire, & en obtint un beaucoup plus considerable que celui qu'il demandoit. Sa générosité fut sentie par ce Visir, comme on auroit pu souhaiter qu'elle le fût par le premier Ministre de la Nation la plus polie, & la plus exercée à la vertu.

Les différentes operations d'une Guerre très vive, suivies de toutes celles qui furent nécessaires pour un règlement de Limites, devoient suffire pour occuper un homme tout entier.

tier. Cependant au milieu de tant de tumulte, d'agitation, de fatigues, de périls, M. Marfigli fit presque tout ce qu'auroit pu faire un Savant, qui auroit voyagé tranquillement pour acquérir des connoissances. Les armes à la main, il levoit des Plans, déterminoit des positions par les méthodes Astronomiques, mesuroit la vîtesse des Rivières, étudioit les Fossiles de chaque País, les Mines, les Métaux, les Oiseaux, les Poissons, tout ce qui pouvoit mériter les regards d'un homme qui sait où il les faut porter. Il alloit jusqu'à faire des Eprouves Chimiques, & des Anatomies. Le tems bien ménagé est beaucoup plus long que n'imaginent ceux qui ne savent guere que le perdre. Le métier de la Guerre a des vuides fréquens, & quelquefois considerables, abandonnés ou à une oisiveté entiere, ou à des plaisirs qu'on se rend témoignage d'avoir bien mérités. Ces vuides n'en étoient point pour le Comte Marfigli; il les donnoit à un métier presque aussi noble, à celui de Philosophie & d'Observateur, il les remplissoit comme auroit fait Xénophon. Il amassa un grand Recueil, non-seulement d'Ecrits, de Plans, de Cartes, mais encore de curiosités d'Histoire Naturelle.

La succession d'Espagne ayant rallumé en 1701 une Guerre qui embrasa l'Europe, l'importante Place de Brisac se rendit par capitulation à feu M<sup>r</sup> le Duc de Bourgogne, le 6 Septembre 1703, après 13 jours de Tranchée ouverte. Le Comte d'Arce y commandoit,,

doit, & sous lui M. Marfigli, parvenu alors au grade de Général de Bataille. L'Empereur, persuadé que Brisac avoit été en état de se défendre, & qu'une si prompte capitulation s'étoit faite contre les règles, nomma des Juges pour connoître de cette grande affaire. Ils prononcèrent le 4 Fév. 1704 une Sentence, par laquelle le Comte d'Arco étoit condamné à avoir la tête tranchée, ce qui fut exécuté le 18 du même mois, & le Comte Marfigli à *être déposé de tous honneurs, & chargé, avec la rupture de l'Epée.* Un coup si terrible lui dut faire regretter l'esclavage chez les Tartares.

Il est presque impossible que de pareils coups fassent la même impression sur le coupable, & sur l'innocent; l'un est terrassé malgré lui-même par le témoignage de sa conscience, l'autre en est soutenu & relevé. Il alla à Vienne pour se jeter aux pieds de l'Empereur, & lui demander la révision du procès; mais il ne put en huit mois approcher de S. M. I. Grace en effet très difficile à obtenir du Prince le plus juste, à cause des conséquences, ou dangereuses, ou tout au moins desagréables. Il eut donc recours au Public, & remplit l'Europe d'un grand Mémoire imprimé pour sa justification. Par bonheur pour lui, un Anonime, & ce ne fut qu'un Anonime, y répondit, ce qui lui donna lieu de lever jusqu'aux moindres scrupules, que son Apologie auroit pu laisser. Le fond en est, que longtems avant le Siege de Brisac, il avoit représenté très instamment que

que la Place ne pourroit se défendre, & il le fait voir par les Etats de la Garnison, des Munitions de guerre, &c. Pieces dont on ne lui a pas contesté la vérité. On lui avoit refusé, sous prétexte d'autres besoins, tout ce qu'il avoit demandé de plus nécessaire & de plus indispensable. Il n'étoit point le Commandant, & il n'avoit fait que se ranger à l'avis entierement unanime du Conseil de Guerre. Mais cette grande brièveté, à laquelle nous sommes obligés de réduire ses raisons, lui fait tort, & il vaut mieux nous contenter de dire, que le Public, qui fait si bien faire entendre son jugement sans le prononcer en forme, ne souscrivit pas à celui des Commissaires Impériaux. Les Puissances mêmes alliées de l'Empereur, intéressées par conséquent à la conservation de Brisac, reconnurent l'innocence du Comte Marfigli, & la Hollande nommément permit qu'on en rendît témoignage dans des Ecrits qui furent publiés. Parmi tous ces suffrages favorables, nous en avons encore un à compter, qui n'est à la vérité que celui d'un Particulier, mais ce Particulier est M. le Maréchal de Vauban, dont l'autorité auroit pu être opposée, s'il l'eût fallu, à celle de toute l'Europe, comme l'autorité de Caton à celle des Dieux. Sur le fond de toute cette affaire, il parut généralement qu'on avoit voulu au commencement d'une grande Guerre donner un exemple effrayant de sévérité, dont on prévoyoit le besoin dans beaucoup d'autres occasions pareilles; la Morale des Etats se résout pour

de

de si grands intérêts à hazarder le sacrifice de quelques Particuliers.

M. Marfigli envoya en 1705, toutes ses Pièces justificatives à l'Académie, comme à un Corps dont il ne vouloit pas perdre l'estime; & il est remarquable dans la Lettre qu'il lui écrivit, qu'après avoir parlé en peu de mots de sa malheureuse situation, il ne pense plus qu'à des projets d'Ouvrages, & les expose assez au long, principalement l'idée qu'il avoit d'établir le véritable cours de la Ligne de Montagnes, qui commence à la Mer noire, va parallelement au Danube jusqu'au Mont St Gothard, & continue jusqu'à la Méditerranée.

Dans l'impression de ses Apologies, il met pour Vignette une espèce de Devise singulière, qui a rapport à son aventure. C'est une *M*, première lettre de son nom, qui porte de part & d'autre entre ses deux jambes les deux tronçons d'une Epée rompue, avec ces mots; *fractus integro*. Eût-il imaginé, eût-il publié cette représentation affligeante, s'il se fût cru flétri; & n'eût-il pas cru l'être, si la voix publique ne l'eût pleinement rassuré?

Il chercha sa consolation dans les Sciences, dont il s'étoit ménagé le secours, sans prévoir qu'il lui dût être un jour si nécessaire. Ce qui n'avoit été pour lui qu'un Lieu de plaisir, devint un Asyle. Il conserva la pratique d'étudier par les voyages, dont il avoit contracté l'habitude, & c'est réellement la meilleure pour l'Histoire-Naturelle, qui étoit son grand objet. Il alla en Suisse, où la Nature



ture se présente sous un aspect si différent de tous les autres ; & ce País l'intéressoit particulièrement, parce-qu'il vouloit faire un Traité de la Structure organique de la Terre, & que les Montagnes sont peut être des espèces d'Os de ce grand Corps. Il vint ensuite à Paris, où il ne trouva pas moins de quoi exercer sa curiosité, quoique d'une manière différente ; de là il parcourut la France, & s'arrêta à Marseille pour étudier la Mer.

Etant un jour sur le Port, il reconnut un Galérien Turc, pour être celui qui l'attachoit toutes les nuits au pieu, dont nous avons parlé. Ce Malheureux, frappé d'un effroi mortel, se jeta à ses pieds pour implorer sa miséricorde, qui ne devoit consister qu'à ne pas ajouter de nouvelles rigueurs à sa misère présente. M. Marfigli écrivit à M. le Comte de Pontchartrain, pour le prier de demander au Roi la liberté de ce Turc, & elle fut accordée. On le renvoya à Alger, d'où il manda à son Libérateur qu'il avoit obtenu du Bacha des traitemens plus doux pour les Esclaves Chrétiens. Il semble que la Fortune imitât un Auteur de Roman, qui auroit ménagé des rencontres imprévues & singulières, en faveur des vertus de son Héros.

Le Comte Marfigli fut rappelé de Marseille en 1709, par les ordres du Pape Clément XI, qui dans les conjonctures d'alors crut avoir besoin de Troupes, & lui en donna le commandement ; tant l'affaire de Brisac lui avoit laissé une réputation entière ! car la valeur & la capacité les plus réelles  
n'au-

n'auroient pas suffi, il faut toujours dans de semblables choix compter avec l'opinion des hommes. Quand ce commandement fut fini par le changement des conjonctures, le Pape voulut retenir M. Marfigli auprès de lui, par l'offre des emplois militaires les plus importants dont il disposât, & même, pour n'épargner aucun moyen, par l'offre de la Prélatrice, qui auroit pu le relever si glorieusement, & le porter à un rang si haut; mais il refusa tout pour aller reprendre en Provence les délicieuses recherches qu'il y avoit commencées. Il en envoya à l'Académie en 1710 une assez ample Relation, dont nous avons rendu compte \*, & la belle découverte des Fleurs du Corail y est comprise. Cet Ouvrage a été imprimé à Amsterdam en 1715, sous le titre d'*Histoire Physique de la Mer*. Des affaires domestiques le rappellerent à Bologne; & là il commença l'exécution d'un dessein qu'il méditoit depuis longtems, digne d'un homme accoutumé au grand pendant tout le cours de sa vie.

Entre toutes les Villes d'Italie, Bologne est célèbre par rapport aux Sciences, & aux Arts. Elle a une ancienne Université, pareille aux autres de l'Europe; une Académie de Peinture, de Sculpture, & d'Architecture, nommée *Clementine*, parce qu'elle a été établie par Clément XI; enfin une Académie des Sciences, qui s'appelle l'Académie des *Inquiets*, nom assez convenable aux Philosophes modernes, qui n'étant plus fixés par au-

\* V. l'Hist. de 1710. p. 30. 63. 91.

Grand d'Espagne, & M. Marfigli, le Roi ne voulut point faire de choix, entre eux, & il ordonna que tous deux seroient de l'Académie, parce que la premiere place d'Associé Etranger qui vaqueroit, ne seroit point remplie. N'eût-il pas sans hésiter donné la préférence à un homme du mérite & de la dignité du Duc d'Escalonne, pour peu qu'il fût resté de tache au nom de son Concurrent, & cette tache n'eût-elle pas été de l'espece la plus odieuse aux yeux de ce grand Prince ? M. Marfigli étoit aussi de la Société Royale de Londres, & de celle de Montpellier. Ce n'étoit pas un honneur à négliger pour les différentes Académies, que de compter parmi leurs membres le Fondateur d'une Académie.

Elle l'occupoit toujours, & il se livroit volontiers à toutes les idées qui lui venoient sur ce sujet, quelques soins & quelques dépenses qu'elles demandassent. Il mit sur pied une Imprimerie, qui devoit être fournie non-seulement de Caractères Latins & Grecs, mais encore Hébreux & Arabes, & il fit venir de Hollande des Ouvriers habiles pour les fondre. Il eut des raisons pour ne pas donner ce grand fonds à l'Institut directement, mais aux Peres Dominicains de Bologne, à condition que tous les Ouvrages qui partiroient de l'Institut seroient imprimés en remboursant seulement les frais. Il donna à cette Imprimerie le nom d'Imprimerie de St Thomas d'Aquin, dont il invoquoit la protection pour cet établissement, & pour tout l'Institut.

Le

Le Protecteur étoit bien choisi, car St Thomas dans un autre siècle, & dans d'autres circonstances, étoit Descartes. Nous passons sous silence des Processions, où il vouloit que l'on portât huit Bannieres, qui auroient représenté les principaux événemens de la vie du Saint, & auxquelles on jugea à propos de substituer la Châsse de ses Reliques. La dévotion d'Italie prend assez souvent une forme, qui n'est guere de notre goût d'aujourd'hui.

Ce qui en fera certainement davantage, c'est l'établissement qu'il fit d'un Tronc dans la Chapelle de l'Institut pour le rachat des Chrétiens, & principalement de ses Compatriotes esclaves en Turquie. Il n'oublia rien pour animer cette charité; il se souvenoit de ses malheurs utilement pour les autres Malheureux. Par le même souvenir il ordonna une Procession solemnelle de l'Institut tous les vingt-cinq ans, le jour de l'Annonciation. Ces Fêtes, ces cérémonies, fondées sur la piété, pouvoient aussi avoir une politique sensée & légitime; elles lioient l'Institut à la Religion, & en assuroient la durée.

Il manquoit encore à la Collection d'Histoire-Naturelle, dont l'Institut étoit en possession, quantité de choses des Indes, car ce qui y dominoit c'étoit l'Europe; & il jugea qu'il ne pouvoit avoir promptement ces curiosités, qu'en les allant chercher en Angleterre & en Hollande. Il s'embarqua à Livourne pour Londres, quoique dans un âge déjà fort avancé, & il alla de Londres à Amsterdam finir ses savantes emplettes. Là

*Hist.* 1730.

I.

il

il donna à imprimer son grand ouvrage du *Cours du Danube*, dont il a paru à la Haye en 1726 une Edition magnifique en 6 vol. in fol. Et il négocia avec les Libraires un nombre de bons Livres destinés à son Institut. Quand toutes ses nouvelles acquisitions furent rassemblées dans Bologne, il en fit la donation en 1727.

Tout cela fini, tous ses projets heureusement terminés, il imita en quelque sorte Solon, qui après avoir été le Législateur de son País, & n'ayant plus de bien à lui faire, s'en exila. Il alla en 1728 retrouver sa retraite de Provence, pour y reprendre ses recherches de la Mer, & suivre en liberté ce génie d'observation qui le possédoit. Mais il eut en 1729 une légère attaque d'Apoplexie, & les Médecins le renvoyerent dans l'air natal. Il ne fit qu'y languir jusqu'au 1 Nov. 1730. qu'une seconde attaque l'emporta. Tout Bologne fit parfaitement son devoir pour un pareil Citoyen, qui, à l'exemple des anciens Romains, avoit uni en même degré les Lettres & les Armes, & donné tant de preuves d'un amour singulier pour sa Patrie.



## **AVIS AU RELIEUR.**

**Le Relieur aura soin de conserver le papier blanc qui est à côté des Figures, afin de les faire déborder hors du Livre.**

## **AAN DEN BOEKBINDER.**

**De Boekbinder zy gewaarschouwt het papier ter zyde de Figuren niet af te snyden, maar zodaanig in te zetten, datze buiten het Boek uitlaan.**

# MEMOIRES

DE

MATHEMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE,

TIRE'S DES REGISTRES

*de l'Académie Royale des Sciences,*

De l'Année M. DCCXXX.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

OBSERVATIONS

METEOROLOGIQUES

FAITES A AIX

Par M. DE MONTVALON, *Conseiller au  
Parlement d'Aix. Comparées avec celles qui  
ont été faites à Paris.*

Par M. CASSINI.

*Observations sur la quantité de Pluie de l'année 1729.*

|                | A Paris.                | A Aix.                  |
|----------------|-------------------------|-------------------------|
| EN Janvier.... | 13 lignes $\frac{1}{2}$ | 10 lignes $\frac{1}{4}$ |
| Février....    | 5 $\frac{1}{2}$         | 8 $\frac{1}{4}$         |
| Mars....       | 8 $\frac{1}{2}$         | 5 $\frac{1}{4}$         |
| Mem. 1730.     | A                       | En                      |



## 2 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

|               | A Paris.                | A Aix.                  |
|---------------|-------------------------|-------------------------|
| En Avril..... | 19 lignes $\frac{1}{2}$ | 24 lignes $\frac{1}{4}$ |
| Mai.....      | 43 $\frac{1}{2}$        | 18 $\frac{1}{4}$        |
| Juin.....     | 8 $\frac{1}{2}$         | 24 $\frac{1}{2}$        |
| Juillet.....  | 22 $\frac{1}{2}$        | 4 $\frac{1}{4}$         |
| Août.....     | 28 $\frac{1}{2}$        | 2 $\frac{1}{4}$         |
| Septembre...  | 20                      | 14 $\frac{2}{3}$        |
| Octobre....   | 13 $\frac{2}{3}$        | 19 $\frac{1}{2}$        |
| Novembre...   | 8 $\frac{2}{3}$         | 73 $\frac{1}{3}$        |
| Decembre...   | 12 $\frac{1}{2}$        | 13 $\frac{1}{4}$        |

Somme totale de la Pluie tombée en l'année  
 1719 à Paris... 204 lign.  $\frac{2}{3}$  à Aix... 219 lign.  $\frac{1}{2}$   
 ou 17 pouces  $\frac{2}{3}$  ou 18 pouc. 3 lign.  $\frac{2}{3}$

En comparant ensemble ces Observations, on trouve que la quantité de Pluie qui est tombée à Aix est plus grande de 15 lignes que celle que l'on a observée à Paris; on voit aussi que cette quantité de Pluie a été distribuée bien inégalement dans chaque mois, puisqu'il en est tombé pendant le mois de Mai à Paris 43 lignes  $\frac{1}{2}$ , & à Aix 18 lign.  $\frac{1}{4}$ , au mois d'Août à Paris 28 lignes  $\frac{1}{2}$ , & à Aix 2 lignes  $\frac{1}{2}$ , au lieu qu'au mois de Novembre il en est tombé à Paris 8 lign.  $\frac{2}{3}$ , & à Aix 73 lign.  $\frac{1}{3}$ .

Il paroît aussi que quoique la quantité de Pluie ait été en 1729 de même qu'en 1728 plus grande à Aix qu'à Paris, elle n'a pas gardé la même proportion que l'année précédente, où il a plu à Aix 24 pouces 9 lignes  $\frac{1}{2}$ , 8 pouces 8 lignes plus qu'à Paris.

*Observations sur le Thermometre.*

Le plus grand froid est arrivé à Aix le 9 Janvier, le Thermometre étant descendu à 13 degrés  $\frac{1}{2}$ , qui répondent à 17 degrés  $\frac{1}{2}$  du Thermometre de l'Observatoire.

A Paris le plus grand froid le 20 Janvier, le Thermometre étant descendu à 9 degrés  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire, 8 degrés ou environ plus bas que le 9 Janvier à Aix.

La plus grande chaleur est arrivée le 20 Juillet à 3 heures après midi, le Thermometre étant monté à 81 degrés, que M. de Montvalon juge répondre à 80 degrés de celui de Paris.

A Paris le plus grand chaud est arrivé le 18 Juin à 3 heures après midi, où l'on observa le Thermometre à 78 degrés, plus bas seulement de 2 degrés que le 20 Juillet à Aix.

*Sur le Barometre.*

La plus grande hauteur du Barometre a été observée à Aix le 31 Decembre de 27 pouces 10 lignes, après une grande pluie; plus basse de 6 lignes qu'à Paris, où il a été observé le 6 Fevrier à 28 pouces 4 lignes.

La moindre hauteur a été à Aix le 21 Novembre à 26 pouces 11 lignes, plus basse de 2 lignes  $\frac{1}{2}$  qu'à Paris, où il est descendu le 22 Fevrier à 27 pouces 1 ligne  $\frac{1}{2}$  par un vent de Sud-ouest couvert.

*Sur la Déclinaison de l'Aimant.*

La déclinaison de l'Aimant a été observée  
à Aix de . . . . . 14<sup>d</sup> 0'.

Elle a été observée à Marseille par  
le P. Pefenas, Professeur d'Hydrogra-  
phie, de . . . . . 14 50.



## M E M O I R E

*Sur le Cryftallin de l'Oeil de l'Homme, des Animaux  
à quatre pieds, des Oifeaux & des Poiffons.*

Par M. PETIT le Médecin. \*

**L**E Cryftallin est une partie transparente de l'Oeil, de figure lenticulaire, d'une substance molle, mucilagineuse, mais assez ferme pour se contenir dans ses propres bornes, enchassée dans la partie antérieure de l'Humeur vitrée comme un Diamant dans son Chaton, dans laquelle il est retenu par une Membrane qui l'enveloppe entierement, & qui pour cela est appelée la *Capsule du Cryftallin*.

L'on fait que le nom de Cryftallin ne lui a été donné que parce qu'il est transparent comme un morceau de Crytal: c'est apparemment à cause de cette transparence que les Anatomistes l'ont mis au nombre des Humeurs des Yeux, quoique les parties qui le composent ne soient point fluides.

Sa

Sa substance est d'une consistance moyenne entre la fermeté & la liquidité; ses parties ne se dérangent point par elles-mêmes les unes à l'égard des autres.

Il est d'une forme lenticulaire dans l'Homme, les Animaux à quatre pieds & les Oiseaux. Il est sphérique, à peu de chose près, dans presque tous les Poissons & les Serpens; il est plus applati dans l'Homme & dans le Singe que dans aucun autre animal, parce qu'il a moins de convexité dans ses surfaces, sur-tout à sa partie antérieure.

La circonférence du CrySTALLIN est ordinairement ronde; j'en ai pourtant trouvé dans l'Homme qui ne l'étoient pas, & dont le diamètre étoit plus grand d'un quart de ligne d'un côté que de l'autre.

Le diamètre de la circonférence du CrySTALLIN dans l'Homme a pour l'ordinaire 4 lignes, quelquefois 4. lign.  $\frac{1}{4}$  & 4 lign.  $\frac{1}{2}$ ; je l'ai vu rarement de 3 lign.  $\frac{1}{2}$  dans les Adultes, mais je l'ai souvent trouvé de 3 lign.  $\frac{1}{2}$  dans les Enfants.

Son épaisseur est de 2 lignes & 2 lign.  $\frac{1}{4}$  dans les Adultes, quelquefois d'une ligne  $\frac{1}{2}$ , mais dans les Enfants on le trouve de 2 lign.  $\frac{1}{2}$ .

La convexité antérieure du CrySTALLIN dans l'Homme fait une portion de sphère dont le diamètre est de 6 lign. 6 lign.  $\frac{1}{2}$ , jusqu'à 9 lignes, & quelquefois de 12 lignes; j'en ai même trouvé dans des gens âgés qui étoient presque plans à leur partie antérieure de la longueur de 2 lignes, & dont la convexité me paroïssoit être une portion de sphère de 25 à 30 lign. de diamètre: cela est bien extraor-

6. MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

dinaire. On en trouve aussi qui n'ont que 5 lign.  $\frac{1}{2}$ , mais rarement, à moins que ce ne soit dans quelques Enfants.

La convexité postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 5 lign. rarement de 5 lign.  $\frac{1}{2}$  & de 4 lign.  $\frac{1}{4}$ , à moins que ce ne soit des CrySTALLINS d'Enfans.

J'ai trouvé des CrySTALLINS dont les deux convexités étoient égales. J'en ai vu aussi de plus convexes à la partie antérieure qu'à la partie postérieure, & j'ai rencontré plus d'une fois, dans les Yeux du même Homme, un CrySTALLIN plus convexe à sa partie antérieure qu'à la partie postérieure, l'autre CrySTALLIN étant dans son état naturel.

J'ai aussi trouvé quelques CrySTALLINS dont la convexité postérieure n'étoit point sphérique, mais elle approchoit de la figure parabolique. \*

Le CrySTALLIN de l'Homme pèse 4 grains, dans les Adultes, quelquefois 4 grains  $\frac{1}{4}$ , rarement 4 grains  $\frac{1}{2}$  & 3 grains  $\frac{1}{4}$ . Je l'ai trouvé dans les Enfants de huit ou dix ans pesant 3 grains, jusqu'à 3 grains  $\frac{1}{2}$ .

Il pesoit un grain  $\frac{1}{2}$  dans un Fœtus de sept mois, il n'avoit que 2 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & une ligne  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur. Sa convexité antérieure faisoit la portion d'une sphere de 3 lignes de diametre, & la postérieure étoit de 2 lign.  $\frac{1}{2}$ .

Le CrySTALLIN pesoit 2 grains dans un Fœtus de neuf mois. Il avoit 2 lign.  $\frac{1}{4}$  de diametre & 2 lignes d'épaisseur, & les mêmes convexités que le précédent.

Ce-

\* V. les Mem. de 1725. p. 20.



**Cryſtallins  
du même  
Homme.**

**Cryſtallins  
du même  
Homme.**

| Nom-<br>bre. | Age. |
|--------------|------|
| 1.           | 12.  |
| 2.           | 15.  |
| 3.           | 15.  |
| 4.           | 20.  |
| 5.           | 25.  |
| 6.           | 30.  |
| 7.           | 30.  |
| 8.           | 30.  |
| 9.           | 30.  |
| 10.          | 35.  |
| 11.          | 40.  |
| 12.          | 40.  |
| 13.          | 40.  |
| 14.          | 45.  |
| 15.          | 45.  |
| 16.          | 50.  |
| 17.          | 50.  |
| 18.          | 55.  |
| 19.          | 55.  |
| 20.          | 60.  |
| 21.          | 60.  |
| 22.          | 60.  |
| 23.          | 60.  |
| 24.          | 60.  |
| 25.          | 60.  |
| 26.          | 65.  |

|           |                                                                                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Age.      | 12.                                                                                    | 15. | 15. | 20. | 25. | 30. | 30. | 30. | 35. | 40. | 40. | 50. | 55. |
| Am-<br>e. |                                                                                        |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | d'un Enfant de huit jours de naissan-                                                  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | oit 2 grains. Il avoit 2 lign. $\frac{1}{4}$ de diame-                                 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | & 2 lignes d'épaisseur. Sa convexité an-                                               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | térieure faisoit une portion de sphere de 4 lign.                                      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | d'un Enfant de neuf jours de naissan-                                                  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | oit 2 grains $\frac{1}{4}$ . Il avoit 3 lignes de dia-                                 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | mètre, & 2 lign. $\frac{1}{4}$ d'épaisseur. Sa convexité                               |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | an-érieure faisoit la portion d'une sphere de                                          |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | 4 lignes, & la postérieure de 3 lign. $\frac{1}{4}$ .                                  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | Il faut remarquer que le diametre du Cryf-                                             |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | tallin n'est pas toujours proportionné à son                                           |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | diametre. J'ai trouvé des Cryftallins qui a-                                           |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | voient 4 lignes de diametre & une ligne $\frac{1}{4}$ d'é-                             |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | paisseur, d'autres 2 lignes, d'autres 2 lign. $\frac{1}{4}$ ,                          |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | jusqu'à 2 lign. $\frac{1}{2}$ . J'en ai trouvé avec 2 lignes                           |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | d'épaisseur, qui avoient 3 lign. $\frac{1}{4}$ de diametre,                            |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | 4 lignes, 4 lign. $\frac{1}{4}$ , 4 lign. $\frac{1}{2}$ & 4 lign. $\frac{1}{2}$ . J'ai |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | vu dans un Homme de quarante ans les deux                                              |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|           | Cryftallins de differens diametres.                                                    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

Les convexités des Cryftallins ne sont pas toujours proportionnées à l'âge, elles diminuent pour l'ordinaire à mesure que l'on avance en âge, ce qui dépend de la contraction des Muscles, comme nous le dirons dans un Mémoire particulier. Les Cryftallins se trouvent quelquefois aussi convexes dans un homme âgé que dans un jeune homme. Leur grosseur ne s'accorde pas toujours avec leur pesanteur; ils sont d'autant plus pesans qu'ils sont fermes, quoique de même grosseur.

On peut voir toutes ces diversités dans la Table suivante, je les ai tirées d'un grand nombre d'Yeux que j'ai examinés.



8: MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

L'on voit dans cette Table des CrySTALLINS de même âge avoir differens diametres & differentes épaisseurs.

Il y a des gens âgés de 60 ans qui ont la même épaisseur du CrySTALLIN que des jeunes gens âgés de 12, de 15, de 30, de 40 ans, avec les mêmes convexités.

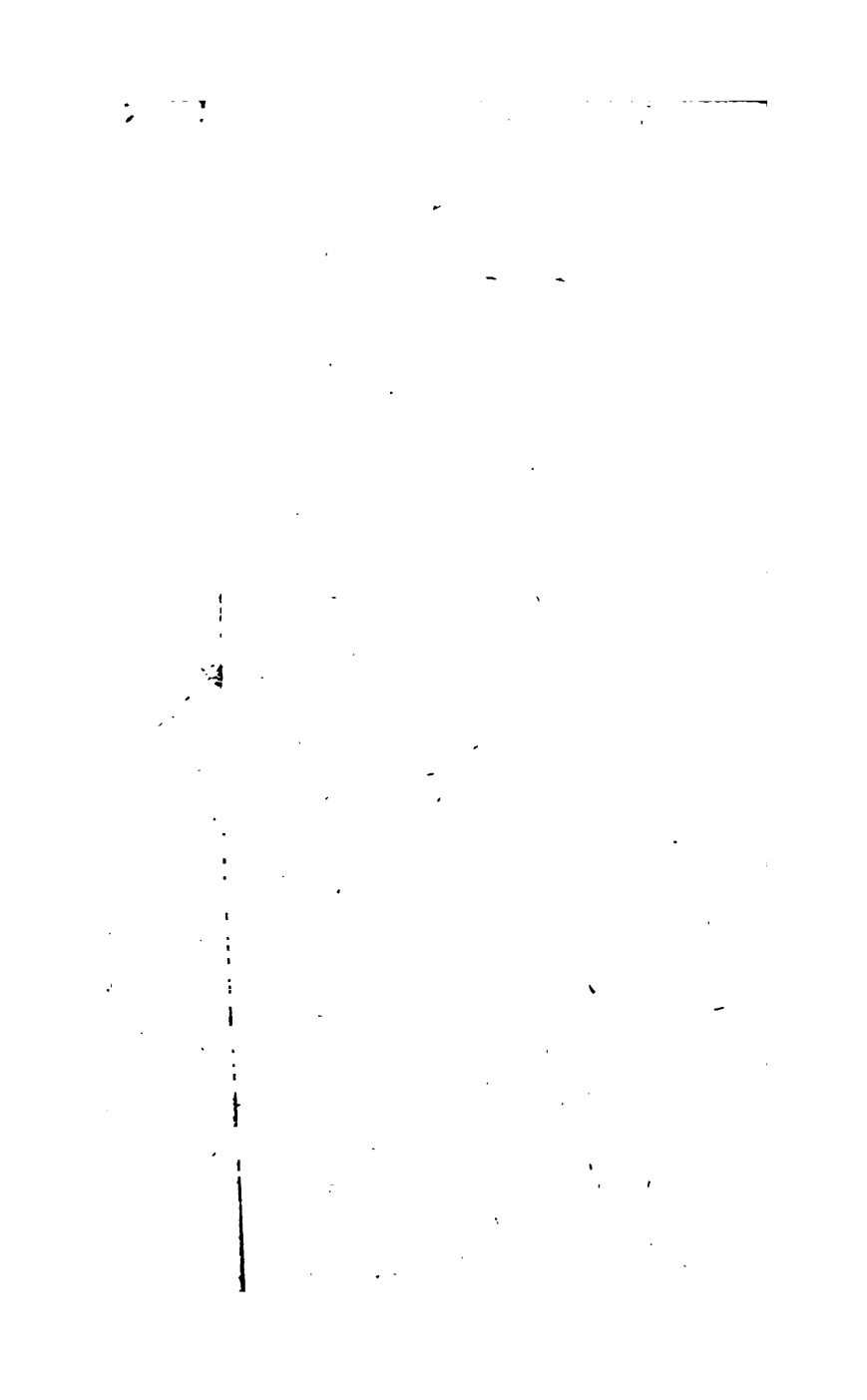
On voit des convexités différentes avec la même épaisseur & la même largeur. Et dans un homme âgé de 30 ans & un autre de 40, on y trouve les deux CrySTALLINS de différentes convexités, de differens diametres & de différentes pesanteurs.

Il est bon d'avertir ici que les âges ont été déterminés sur la simple vue du Cadavre, ce qui est sujet à quelque erreur, mais qui n'est pas de conséquence. Il est presque impossible de savoir l'âge de ceux qui meurent dans les Hôpitaux, principalement après leur décès, & lorsqu'ils sont une fois dans la Salle des Morts.

Le Singe est de tous les Animaux celui dont les parties approchent le plus de celles de l'Homme. Ses Yeux sont tout semblables à ceux de l'Homme; son CrySTALLIN a les mêmes convexités, peu s'en faut; il n'a pourtant que 3 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur, jusqu'à 3 lign.  $\frac{1}{2}$ ; & une ligne  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur, jusqu'à une ligne  $\frac{3}{4}$ .

La convexité antérieure du CrySTALLIN du Cheval fait une portion de sphere dont le diametre a 12 lignes, jusqu'à 15. La convexité postérieure fait une portion de sphere qui a 10 lignes, jusqu'à 11 lignes de diametre.

Le diametre ou la largeur de ce CrySTALLIN est



| cur.               | Defanteur.             |
|--------------------|------------------------|
| ES $\frac{1}{2}$ . | 38 grains.             |
| $\frac{1}{2}$ .    | 38 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 38 gr.                 |
| $\frac{3}{4}$ .    | 41 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 41 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 42 gr. $\frac{1}{2}$ . |
| $\frac{2}{3}$ .    | 43 gr. $\frac{1}{2}$ . |
| $\frac{1}{3}$ .    | 44 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 44 gr.                 |
| $\frac{1}{3}$ .    | 44 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 44 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 44 gr. $\frac{1}{2}$ . |
| $\frac{1}{2}$ .    | 45 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 45 gr.                 |
| $\frac{1}{4}$ .    | 46 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 46 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 47 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 47 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 47 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 47 gr.                 |
| $\frac{1}{4}$ .    | 47 gr. $\frac{1}{2}$ . |
| $\frac{1}{2}$ .    | 48 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 48 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 48 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 49 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 49 gr.                 |
| $\frac{1}{4}$ .    | 49 gr. $\frac{1}{2}$ . |
| $\frac{1}{2}$ .    | 50 gr.                 |
| $\frac{1}{4}$ .    | 50 gr.                 |
| $\frac{1}{4}$ .    | 50 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 50 gr.                 |
| $\frac{2}{3}$ .    | 51 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 51 gr.                 |
| $\frac{1}{4}$ .    | 51 gr.                 |
| $\frac{1}{2}$ .    | 56 gr.                 |

est de 9 lignes, jusqu'à 10. Il a 6 lignes d'épaisseur, jusqu'à 6 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il pèse 58 grains, jusqu'à 66.

La convexité de la partie antérieure du Crystallin de l'Oeil du Bœuf fait une portion de sphere dont le diametre est de 10, 11, 12 lignes, jusqu'à 12 lign.  $\frac{1}{2}$ . La convexité de la partie postérieure fait une portion de sphere dont le diametre est de 8 lign.  $\frac{1}{2}$ , jusqu'à 9  $\frac{1}{2}$ , rarement de 9 lign.  $\frac{3}{4}$  & de 8 lign.

La largeur ou le diametre de ce Crystallin est de 8 lignes, jusqu'à 8 lign.  $\frac{1}{2}$ , rarement de 8 lign.  $\frac{3}{4}$ . Son épaisseur est de 5 lign.  $\frac{1}{4}$ , jusqu'à 6 lign.  $\frac{1}{2}$ . Sa pesanteur est de 38 grains, jusqu'à 54; j'en ai trouvé de 58 grains, mais très rarement.

La facilité que l'on a d'avoir des Crystallins de Bœuf, est cause que j'en ai examiné une très grande quantité, sur lesquels j'ai choisi un certain nombre pour faire la Table suivante, où l'on peut voir la plupart des variétés que nous avons remarquées dans les Crystallins de l'Homme, car l'on y voit que la largeur du Crystallin n'y est pas toujours proportionnée à son épaisseur, & que leur grosseur ne s'accorde pas toujours avec leur pesanteur: il y en a quelques-uns dont je n'ai pas examiné les convexités.

La convexité de la partie antérieure du Crystallin du Mouton fait une portion de sphere dont le diametre est de 7 lign.  $\frac{1}{2}$ , jusqu'à 8 lignes. Sa convexité postérieure fait une portion de sphere, dont le diametre est de 6 lignes, jusqu'à 7.

La largeur ou le diametre est de 5 lign.  $\frac{1}{2}$ , jusqu'à 6 lign.  $\frac{1}{2}$ . Son épaisseur est de 4 lign.  $\frac{1}{2}$ , jusqu'à 4 lign.  $\frac{1}{4}$ . Il pese pour l'ordinaire 24 grains, jusqu'à 28.

La convexité de la partie antérieure du Crystallin de l'Oeil du Chien-dogue & de trois ou quatre Loups que j'ai disséqués, fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 6 lignes, jusqu'à 6 lign.  $\frac{1}{2}$ . La convexité de la partie postérieure est quelquefois égale à l'antérieure, mais pour l'ordinaire elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 5 lignes, jusqu'à 5 lign.  $\frac{1}{2}$ .

La largeur de ce Crystallin est de 4 lign.  $\frac{1}{2}$ , jusqu'à 5 lign. & 3 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur, jusqu'à 3 lign.  $\frac{1}{4}$ . Il pese 12 grains, jusqu'à 14.

Les Crystallins des Yeux des gros Chats ne diffèrent presque point de ceux du Chien & du Loup.

J'ai disséqué les Yeux d'un seul Renard, la convexité de la partie antérieure de ses Crystallins faisoit la portion d'une sphere de 6 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la convexité postérieure faisoit la portion d'une sphere de 5 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre.

Ils avoient 5 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur, & 4 lignes d'épaisseur. Ils pesoient chacun 12 grains.

On trouve presque toujours la convexité de la partie antérieure du Crystallin de l'Oeil du

du Lievre & du Lapin égale à la postérieure, elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 6 jusqu'à 7 lignes.

La largeur de ce CrySTALLIN est de 5 lign.  $\frac{1}{2}$ , jusqu'à 6, & son épaisseur est de 4 lign.  $\frac{1}{4}$ , jusqu'à 4 lign.  $\frac{1}{2}$ .

La convexité de la partie antérieure du CrySTALLIN des Yeux du Dindon & de l'Oye est la même; elle fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 4 lign.  $\frac{1}{4}$  ou 5 lignes, assez souvent de 6 lignes; rarement de 7 lignes.

La convexité de la partie postérieure fait la portion d'une sphere, dont le diametre est de 4 lignes; jusqu'à 5 lignes.

Ces CrySTALLINS ont 3 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur, jusqu'à 4 lignes, & 2 lign. jusqu'à 2 lign.  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur. Ils pesent 3 grains, 3 grains  $\frac{1}{2}$  jusqu'à 4 grains  $\frac{1}{4}$ .

Le Chat-huant, le Duc & la Chouette ont le CrySTALLIN de la même conformation, aussi bien que tout le globe de l'Oeil, qui est d'une structure particuliere, comme je l'ai fait voir à l'Académie. La convexité de la partie antérieure du CrySTALLIN est plus grande que la postérieure, car cette partie antérieure fait la portion d'une sphere qui a 6 lignes de diametre. La convexité postérieure fait la portion d'une sphere qui a 7 lign. de diametre.

Il a 6 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur, & 5 lign. d'épaisseur.

Il pèse 14 grains, ce qui est digne de remarque, qu'un si petit Oiseau ait un CrySTALLIN aussi gros & aussi pesant, en comparaison de

de ceux du Dindon & de l'Oye, dont les plus gros Cryftallins n'ont que 4 lign. de diametre, & 4 grains  $\frac{1}{2}$  de pefanteur.

Le Cryftallin de la Chouette eft plus petit que celui du Chat-huant & du Duc, il n'avoit que 4 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur, & 3 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaiffeur, & pefoit 10 grains.

Les Cryftallins de la plupart des Serpens & des Poiffons font à peu près fphériques.

La convexité de la partie antérieure du Cryftallin d'un Marfouin long de 5 pieds, faisoit la portion d'une fphere de 8 lignes de diametre, & la convexité de la partie poftérieure faisoit la portion d'une fphere de 6 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre.

Ce Cryftallin avoit 6 lignes de diametre dans fa circonference, & 5 lignes d'axe ou d'épaiffeur: il pefoit 24 grains.

Le Cryftallin d'un Marfouin, de 4 pieds  $\frac{1}{2}$  de longueur, faisoit à fa partie antérieure la portion d'une fphere de 7 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la poftérieure de 6 lignes.

Ce Cryftallin avoit 5 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de fa circonference, & 4 lign.  $\frac{3}{4}$  d'axe ou d'épaiffeur: il pefoit 22 grains.

Le Cryftallin d'un Marfouin, long de 3 pieds  $\frac{1}{2}$ , faisoit à fa partie antérieure la portion d'une fphere de 7 lign. de diametre, & la poftérieure 5 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de fa circonference, & 4 lignes  $\frac{1}{2}$  d'épaiffeur. Il pefoit 19 grains.

Un Poiffon appelé *Carpe de Mer*, long de 6 pieds, fon Cryftallin faisoit une portion de fphere de 9 lignes de diametre par fa convexi-

vexité antérieure, & par la postérieure elle étoit de 7 lignes.

Le diametre de sa circonference étoit de 6 lign.  $\frac{1}{2}$ , & son épaisseur de 6 lign.  $\frac{1}{4}$ : il pesoit 28 grains.

Le CrySTALLIN d'un Poisson nommé *Reluisant*, long de 7 pieds, faisoit à sa partie antérieure une portion de sphere de 10 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure de 9 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 9 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 9 lign. d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 111 grains.

Le CrySTALLIN d'un Poisson appelé *Negre*, long de 4 pieds, avoit une convexité à sa partie antérieure qui faisoit une portion de sphere de 7 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure de 6 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 6 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 6 lign.  $\frac{1}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 32 grains.

Le CrySTALLIN d'un autre *Negre*, qui avoit 4 pieds  $\frac{1}{2}$  de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 8 lign. de diametre, & la postérieure 6 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 6 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 6 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il pesoit 36 grains.

Le CrySTALLIN d'un Saumon, qui avoit 2 pieds de longueur, avoit à sa partie antérieure une convexité qui faisoit la portion d'une sphere de 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure de 2 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 2 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lign.  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le CrySTALLIN d'un Espadon (*Gladus sive Xiphias*)



#### 114 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

*Xiphias*) long de  $3\frac{1}{2}$  pieds, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 10 lignes de diametre, & la postérieure 8 lignes  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 8 lignes  $\frac{1}{4}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 8 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il pesoit 72 grains.

Le CrySTALLIN d'une Aloze, longue de 21 pouces, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, la partie postérieure 3 lign.  $\frac{1}{4}$ . Il avoit 3 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 3 lign.  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur. Il pesoit 3 grains  $\frac{1}{2}$ .

Le CrySTALLIN d'une autre Aloze, de 14 pouces de longueur, faisoit par sa partie antérieure une portion de sphere de 4 lign. de diametre, & la postérieure de 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il pesoit 3 grains.

Le CrySTALLIN d'un Poisson appelé *Pucelle*, long de 14 pouc. faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure 2 lign.  $\frac{1}{4}$ . Il avoit 2 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lign.  $\frac{1}{2}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains  $\frac{1}{4}$ .

Le CrySTALLIN d'un Brochet, de 2 pieds de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 4 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure de 3 lign.  $\frac{1}{4}$ . Il avoit 3 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 3 lign.  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur. Il pesoit 6 grains.

Le

Le Cryftallin d'un Brochet, de 32 pouces de longueur, avoit les mêmes dimenfions & le même poids.

Le Cryftallin d'un Barbeau ou Barbillon, qui avoit 18 pouces de longueur, faisoit par fa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lignes de diametre, & la postérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de fa circonference, & 2 lign.  $\frac{1}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 4 grains.

Le Cryftallin d'un autre Barbeau, qui avoit 2 pieds de longueur, faisoit par fa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign. de diametre, & la postérieure 3 lign.  $\frac{1}{4}$ . Il avoit 3 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur ou de diametre de fa circonference, & 3 lignes d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 6 grains.

Le Cryftallin d'une Carpe, qui avoit 15 pouces de longueur, faisoit par fa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 3 lignes de diametre, & la postérieure 2 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 2 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de fa circonference, & 2 lign.  $\frac{1}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains  $\frac{1}{2}$ .

Le Cryftallin d'un Maquereau, qui avoit 14 pouces de longueur, faisoit par fa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lign. de diametre, & la postérieure 3 lign.  $\frac{1}{4}$ . Il avoit 3 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur ou de diametre de fa circonference, & 3 lignes d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains  $\frac{1}{4}$ .

Le Cryftallin d'un autre Maquereau, de 14 pouces de longueur, faisoit par fa convexité

vexité antérieure une portion de sphere de 4 lign.  $\frac{1}{3}$  de diametre, & la postérieure de 3 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 3 lign.  $\frac{1}{2}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 3 grains  $\frac{1}{4}$ .

Le CrySTALLIN d'un autre Maquereau, de 13 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphere qui avoit 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure 2 lign.  $\frac{3}{4}$ . Il avoit 2 lign.  $\frac{3}{4}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lign.  $\frac{1}{2}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le CrySTALLIN d'un Merlan, qui avoit 12 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 4 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure 3 lignes  $\frac{3}{4}$ . Il avoit 3 lign.  $\frac{3}{4}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 3 lign.  $\frac{1}{2}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 3 grains  $\frac{1}{4}$ .

Le CrySTALLIN d'un autre Merlan, de 12 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lignes de diametre, & la postérieure 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 3 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il pesoit 4 grains.

Le CrySTALLIN d'un Chien de Mer, qui avoit 3 pieds 3 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 6 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure 5 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 5 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 5 lign.  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur. Il pesoit 18 grains.

Le CrySTALLIN d'un autre Chien de Mer,  
long

long de 2 pieds  $\frac{1}{2}$ , faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure 5 lignes. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 4 lign.  $\frac{1}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 16 grains.

Le CrySTALLIN d'une Raye appelée *Angé*, longue d'un pied  $\frac{1}{2}$  sans la queue, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere qui avoit 5 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure 4 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 4 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 4 lign.  $\frac{1}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 17 grains.

Le CrySTALLIN d'une autre Raye appelée *Bouclée*, longue de 2 pieds sans la queue, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 6 lign.  $\frac{1}{4}$  de diametre, & la postérieure de 5 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 5 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 5 lign.  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur ou d'axe. Il pesoit 18 grains.

Le CrySTALLIN d'un Rouget, qui avoit 10 pouces de longueur, faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 5 lignes de diametre, & la postérieure de 4 lignes. Il avoit 4 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 3 lign.  $\frac{1}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 8 grains  $\frac{1}{2}$ .

Le CrySTALLIN d'un Hareng faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphere de 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure de 2 lign.  $\frac{1}{4}$  de largeur ou de diametre, &

18 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

2 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le Cristallin d'un autre Hareng faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphaere de 3 lignes de diametre, & la postérieure de 2 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 2 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lign.  $\frac{1}{3}$  d'épaisseur. Il pesoit un grain  $\frac{1}{2}$ .

Le CrySTALLIN d'une Tanche faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphaere qui avoit 2 lign.  $\frac{3}{4}$  de diametre, & la postérieure de 2 lignes. Il avoit 2 lignes de largeur, & une ligne  $\frac{3}{4}$  d'épaisseur. Il pesoit un grain.

Le CrySTALLIN d'une Anguille d'eau douce faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphaere qui avoit 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure 3 lignes. Il avoit 3 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 2 lign.  $\frac{3}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 3 grains.

Le CrySTALLIN d'une Anguille de Mer faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphaere de 6 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure de 5 lignes. Il avoit 5 lignes de largeur ou de diametre de sa circonference, & 4 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il pesoit 14 grains.

Le CrySTALLIN d'une Lamproye étoit tout semblable à celui de l'Anguille d'eau douce.

Le CrySTALLIN d'une Lote faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphaere de 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre, & la postérieure d'une ligne  $\frac{3}{4}$ . Il avoit une ligne  $\frac{3}{4}$  de largeur ou de diametre de sa circonference, & une ligne  $\frac{1}{2}$  d'é-

d'épaisseur. Il pesoit  $\frac{1}{4}$  de grain.

J'ai trouvé dans les CrySTALLINS de la plupart des Vipères & des Aspics les mêmes dimensions & les mêmes poids.

Le CrySTALLIN d'une Loutre, que j'ai disséquée, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphère qui avoit 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diamètre, & la postérieure 2 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit 2 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur ou de diamètre de sa circonférence, & 2 lignes d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit un grain  $\frac{1}{2}$ .

Le CrySTALLIN d'une Tortue, qui avoit 2 pieds  $\frac{1}{2}$  de longueur, sans y comprendre la tête ni la queue, faisoit par sa convexité antérieure la portion d'une sphère qui avoit 3 lign.  $\frac{1}{2}$  de diamètre & la postérieure 2 lign.  $\frac{1}{2}$ . Il avoit de largeur ou de diamètre de sa circonférence 2 lign.  $\frac{1}{2}$ , & une ligne  $\frac{1}{4}$  d'axe ou d'épaisseur. Il pesoit 2 grains.

Le CrySTALLIN d'une grosse Grenouille faisoit par sa convexité antérieure une portion de sphère qui avoit 2 lign.  $\frac{1}{4}$  de diamètre, & la postérieure 2 lignes. Il avoit de largeur ou de diamètre de sa circonférence 2 lignes, & une ligne  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur. Il pesoit un grain  $\frac{1}{2}$ .

Le CrySTALLIN d'une moyenne Grenouille ne pesoit qu'un grain, & avoit les dimensions plus petites.

\* Il faut encore remarquer que plus les Animaux sont jeunes, le CrySTALLIN se trouve d'autant plus mou. Il est d'une mollesse qui ressemble à celle de la bouillie refroidie, dans les Foetus & les nouveau-nés; il est même

B 2

plus

plus mou au centre qu'à la circonference, ce qu'il est facile de remarquer dans les CrySTALLINS de Veaux & d'Agneaux.

Si l'on fait secher ces CrySTALLINS, il s'en évapore les deux tiers ou les trois quarts, & l'on trouve une cavité au dedans, ou bien il se fait un enfoncement sur l'une des deux surfaces, quelquefois sur toutes les deux; la même chose arrive aux CrySTALLINS d'Enfans nouveau-nés : mais si l'on met secher des CrySTALLINS d'Hommes de l'âge de 50 à 60 ans, il ne se fait aucun enfoncement qui soit considerable, & qui d'ailleurs ne provient que de la mollesse de la partie extérieure, il s'en évapore seulement le tiers ou le quart; ce qui arrive de même aux CrySTALLINS des autres Animaux, dont l'évaporation se fait à proportion de leur âge. Ces CrySTALLINS, qui sont d'une si grande mollesse dans le premier âge, deviennent peu-à-peu plus fermes, enforte que dans l'Homme de 15 ou 20 ans la consistance du CrySTALLIN se trouve égale au centre & à la circonference, ce que l'on remarque aussi dans les CrySTALLINS de Veaux de deux mois, ou deux mois & demi, & dans ceux d'Agneaux de six semaines ou deux mois. La partie centrale commence à devenir plus ferme dans l'Homme à l'âge de 20 ou 25 ans; cette fermeté s'augmente & s'étend peu-à-peu vers la circonference, qui devient aussi plus ferme; mais quelque fermeté qu'elle acquiere, elle l'est rarement autant que la partie centrale.

Les CrySTALLINS sont non seulement d'autant plus fermes que les Animaux sont plus âgés,  
mais

mais ceux des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons le sont plus que ceux de l'Homme. Les CrySTALLINS des Yeux de Dindon, d'Oye, de Cheval, de Bœuf, de Mouton, & âgés d'un an, sont plus fermes que ceux d'Hommes âgés de 25 ans.

Les CrySTALLINS se trouvent d'autant plus fermes, qu'ils sont plus gros à proportion de leur âge. Ceux de Chevaux le sont plus que ceux de Bœufs, qui le sont plus que ceux de Moutons, & ceux-ci que ceux de Chiens & de Chats.

Ceux des Animaux à quatre pieds sont plus fermes que ceux des Oiseaux, mais ceux des Poissons sont beaucoup plus fermes que ceux de Chevaux & de Bœufs, en sorte que la partie centrale des CrySTALLINS des Poissons a une fermeté qui approche quelquefois de la dureté de la Corne; il est vrai que la substance externe de ces CrySTALLINS est plus molle que celle des autres CrySTALLINS (ce que Morgagni \* a remarqué) car elle est mucilagineuse, ce que j'ai vu aussi dans le CrySTALLIN de la Loutre, animal à quatre pieds, mais aquatique.

Il y a encore une chose singulière qui arrive aux CrySTALLINS des Yeux de l'Homme, & que je n'ai vue dans aucun des CrySTALLINS des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons.

Le CrySTALLIN de l'Homme est transparent & sans couleur depuis la naissance jusqu'à l'âge de 25 ans ou environ, après quoi il com-

men-

\* *Advers.* 6. p. 301.



mence à prendre dans le centre une couleur jaune de paille très legere, qui augmente à mesure que l'on avance en âge ; \* la couleur devient peu-à-peu plus jaune, & s'étend vers la circonference. J'ai vu les CrySTALLINS d'un Invalide âgé de 81 ans, qui ressembloient par leur couleur & leur transparence à des morceaux d'Ambre jaune bien transparens ; & plus les CrySTALLINS sont fermes, plus ils sont jaunes. Mais quelque fermeté qu'ayent les CrySTALLINS des Animaux à quatre pieds, des Oiseaux & des Poissons, je n'en ai trouvé aucun qui eût la moindre couleur. Il y a des CrySTALLINS de Chevaux, mais peu, qui acquièrent cette couleur en sechant à l'air, ils n'avoient aucune couleur dans le tems que je les ai tirés des Yeux. Les CrySTALLINS de Poissons, qui sont plus fermes que ceux de Chevaux, ne jaunissent point en sechant. J'ai quelquefois trouvé dans le même Homme un CrySTALLIN plus jaune que l'autre.

Venons présentement à la structure du CrySTALLIN. Il est formé & composé de fibres agencées les unes contre les autres dans un certain ordre. On voit assez facilement ces fibres dans un CrySTALLIN nouvellement tiré de l'Oeil d'un Bœuf. On frotte un Scalpel d'huile, on l'enfonce environ de l'épaisseur d'une demi-ligne, plus ou moins, au centre d'une des surfaces de ce CrySTALLIN, puis on ramène le Scalpel vers la circonference, en déchirant la substance du CrySTALLIN, on voit les fibres du CrySTALLIN qui forment des pellicules po-

\* K. les Mem. de l'Acad. an. 1726. p. 113 & suiv.

posées les unes sur les autres. On découvre facilement ces pellicules dans les Crystillins sechés à l'air, mais on ne voit point les fibres. On découvre encore mieux l'un & l'autre dans ceux que l'on a fait bouillir dans l'eau.

Voici les expériences que j'ai faites pour cela avec des Crystillins de Bœufs.

J'ai pris un Crystillin de Bœuf qui pesoit 48 grains, il avoit 8 lignes  $\frac{1}{2}$  de diametre, & 5 lignes  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Je l'ai laissé secher à l'air au mois de Juillet. Au bout de quatre jours il ne pesoit plus que 22 grains. Il avoit 7 lignes de diametre, & 4 lignes  $\frac{1}{4}$  d'épaisseur, mais ses surfaces étoient très inégales, bosselées, plus épaisses en des endroits que dans d'autres. Il étoit blanc, opaque à sa partie extérieure, transparent à sa partie interne, mais non pas de cette transparence dont il étoit lorsque je l'ai tiré de l'Oeil. La partie externe étoit feuilletée, la partie interne étoit égale, & s'enlevoit par pieces qui ressembloient à des côtes de Melon: le tout se réduisoit facilement en poudre.

J'ai laissé secher beaucoup d'autres Crystillins, il s'en est trouvé qui pesoient 50 grains, qui étant sechés, ne pesoient plus que 12 grains; d'autres pesant 46 grains, pesoient 30 grains étant secs. Les Crystillins qui perdent le plus de leur pesanteur, ont moins de matiere transparente, & plus de cette matiere feuilletée, blanche & opaque; & ceux qui conservent le plus de leur pesanteur, ont moins de matiere blanche & opaque, & plus

de matiere transparente. En général on leur trouve d'autant plus de matiere transparente, étant sechés, qu'ils sont naturellement plus fermes & d'Animaux plus âgés; c'est ce qui fait que l'on rencontre rarement de la substance transparente dans les Crystillins de l'Homme qui sont sechés, ils se réduisent presque entierement en matiere blanche en sechant, &, comme je l'ai dit, perdent quelquefois les trois quarts de leur pesanteur. Les Crystillins de Veaux, & de tous les jeunes Animaux, perdent, en sechant, aussi les trois quarts de leur pesanteur & plus, & l'on n'y trouve point de matiere transparente. Les Crystillins sont beaucoup plus mous à leur partie extérieure qu'à leur partie interne; lorsque l'humidité, qui cause cette mollesse, vient à s'évaporer, elle laisse des espaces vuides, les parties solides se rapprochent les unes des autres, mais inégalement; ainsi les plans ne se trouvant plus paralleles les uns à l'égard des autres, la matiere lumineuse qui y passe, trouve incessamment des plans inclinés, se rompt & se réfléchit d'une infinité de manieres, ce qui rend le corps opaque, comme il arrive au Verre pilé & au Sablon, composés d'une infinité de parties toutes transparentes.

\* Briggs dit que les Crystillins mis dans une cuillier d'argent exposée sur les charbons ardens, se réduisent en gelée: je ne sai s'il a obmis de rapporter quelques circonstances: j'ai fait cette expérience comme il le dit, bien.

bien-loin de se réduire en gelée, ils se grillent après que toute l'humidité est évaporée; il n'y reste le plus souvent point de matiere transparente, parce que l'humidité qui se trouve dans toute la substance du Crystillin est poussée avec trop de force par la chaleur, & dérange les parties internes du Crystillin.

J'ai mis tremper un Crystillin dans l'eau froide, il pesoit 44 grains, il avoit 8 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur, 5 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Je l'ai retiré 26 heures après, il pesoit 56 grains  $\frac{1}{2}$ , il avoit 8 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre & 6 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. J'en ai mis tremper d'autres, qui ont donné bien des variétés: plus ils sont fermes, plus ils grossissent, & fendent quelquefois leur capsule, & pour-lors ils se trouvent très inégaux, & toujours très mous; si on les laisse tremper plus longtems, ils se réduisent en mucilage.

Les Crystillins bouillis dans l'eau, deviennent opaques & fermes; leur surface reste quelquefois réguliere, & quelquefois irréguliere. Ces Crystillins diminuent dans leur poids & leurs dimensions, puis exposés à l'air encore tout chauds, se sechent bien vite, & se fendent d'abord en trois parties à leurs surfaces antérieures & postérieures. Chacune de ces parties se divise en plusieurs autres, & par ce moyen on peut découvrir leur structure; \* mais cela se fait encore mieux dans les Crystillins trempés dans les Esprits aci-

\* *V. M. Antoine Maitrejean, Descript. de l'Oeil, ch. 11.*

acides, ce qui m'a engagé de faire quantité d'expériences dans lesquelles j'ai employé beaucoup de CrySTALLINS de Bœufs, & très peu de CrySTALLINS d'Hommes, parce qu'ils sont trop petits & trop mous.

J'ai mis dans l'Esprit de Nitre un CrySTALLIN d'Homme qui pesoit 4 grains; il avoit 4 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur, & 2 lign. d'épaisseur. Il a tout aussi-tôt blanchi, il nageoit sur la liqueur. Je l'ai retiré 24 heures après, il n'avoit plus de capsule, elle étoit dissoute.

Le CrySTALLIN étoit devenu jaune-pâle, ses surfaces étoient encore unies & polies. Il pesoit 4 grains, il avoit 4 lignes de diametre, & 2 lignes d'épaisseur. Etant resté quelque tems à l'air, il s'est fendu en plusieurs rayons de la circonference au centre; il s'est séparé par pieces qui ressembloient à des côtes de Melon, & par fibres très fines de la grosseur des fils de Soye grege; elles étoient jaunâtres. Tous les CrySTALLINS d'Hommes que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre, ont été de même, à peu de chose près, Les plus mous se dissolvent tant soit peu, ils diminuent de poids, & restent plus mous que les autres.

J'ai mis dans l'Esprit de Nitre un CrySTALLIN de Bœuf, il pesoit 47 grains  $\frac{1}{2}$ , il avoit 8 lign.  $\frac{1}{2}$  de diametre ou de largeur, & 6 lignes d'épaisseur. La capsule s'est d'abord fendue, & s'est séparée du CrySTALLIN qui nageoit sur la liqueur, elle est devenue jaune, le CrySTALLIN a blanchi tout aussi-tôt, il s'est formé beaucoup de bulles, la capsule s'est presque entièrement dissoute. J'ai retiré le  
Cryf-

**Cryſtallin** 24 heures après, il étoit jaune à ſa ſurface. Il peſoit 52 grains, il eſt augmenté de 4 grains  $\frac{1}{2}$ , il avoit 8 lignes de diamètre, & 5 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaiſſeur. Il avoit donc diminué de demi-ligne dans ſon diamètre, & de deux tiers de ligne dans ſon épaiſſeur, quoiqu'il eût augmenté de poids. Il étoit fendu en trois rayons du centre à la circonférence, il s'eſt ſeché à l'air en 24 heures, & il s'eſt diviſé en pieces qui reſſembloient à des côtes de Melon, qui ſe ſont ſéparées en peaux, qui étoient jaunes de Safran, & ſes peaux en fibres très déliées comme le Cryſtallin de l'Homme.

Tous les Cryſtallins de Bœufs que j'ai mis dans l'Eſprit de Nitre pur, ont donné les mêmes phénomènes. Il y en a qui n'ont augmenté que d'un grain, d'autres ont diminué de 5 ou 6 grains; quelques-uns ont eu la ſurface très inégale, molle, enſorte que je n'ai pu en meſurer les dimensions, & n'ont pu ſe ſecher à l'air qu'en trois fois 24 heures; il ſ'en eſt trouvé qui étoient mous dans le centre, & d'autres fermes dans toute leur ſubſtance.

J'ai mis un Cryſtallin d'Homme dans un mélange de partie égale d'Eſprit de Nitre & d'Eau commune, il peſoit 4 grains  $\frac{1}{2}$ , il avoit 4 lign.  $\frac{1}{2}$  de diamètre, & 2 lignes d'épaiſſeur. Il a blanchi dans le moment par rayons, il nageoit ſur la liqueur, mais le lendemain il s'eſt trouvé au fond. Je l'ai retiré 24 heures après, il étoit opaque, dur, jaunâtre, fendu en quatre rayons, envelopé de ſa capſule, qui

est restée transparente. Il pesoit 4 grains, il avoit 4 lignes de largeur, & 2 lignes d'épaisseur: Il avoit donc diminué d'un quart de grain, & d'un tiers de ligne dans son diametre.

J'ai mis un Crystallin de Bœuf dans le même mélange d'Esprit de Nitre & d'Eau, il pesoit 49 grains, il avoit 8 lign.  $\frac{1}{2}$  de largeur, & 5 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il a d'abord nagé sur la liqueur, & est devenu blanc en une demi-minute, une heure & demie après il étoit précipité au fond de la liqueur. Je l'ai retiré, il s'est trouvé blanc, opaque, fendu en six rayons du centre de sa surface antérieure jusqu'àuprès de sa circonference. Je l'ai remis dans la liqueur, le lendemain je l'ai trouvé nageant sur la liqueur; je l'ai retiré, il étoit jaune de paille, dur, opaque; fendu plus profondément qu'il n'étoit le jour précédent. Il avoit 8 lignes de diametre ou de largeur, & 5 lign.  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur. Il pesoit 44 grains sans la membrane qui pesoit un grain  $\frac{1}{2}$ , elle étoit transparente. Ce Crystallin a donc diminué dans ses dimensions & dans sa pesanteur.

La même chose est arrivée à un autre Crystallin dans une pareille liqueur.

Les Crystallins mis dans l'Esprit de Sel dulcifié, ont eu les mêmes phénomènes que ceux qui ont été mis dans l'Esprit de Nitre mêlé avec moitié Eau.

Les Crystallins que j'ai mis dans l'Esprit de Sel, ont donné à peu près les mêmes phénomènes que ceux que j'ai mis dans l'Esprit de Nitre pur. Ils ont nagé sur cet Esprit; ils ont blanchi tout d'abord, puis ils sont devenus

mus jaunes, ils se font fendus par rayons, la membrane ou capsule s'est dissoute dans quelques expériences, elle s'est trouvée toute entière dans d'autres, & transparente. Ils ont diminué dans leurs dimensions, mais ce qu'il y a de différent, ils ont toujours diminué de poids. depuis 5 grains jusqu'à 10, & ces CrySTALLINS étant gardés, sont toujours devenus bruns ou noirs, au-lieu que les CrySTALLINS, mis dans l'Esprit de Nitre & séchés, sont restés jaunes de Safran ou aurore.

\* Les CrySTALLINS mis dans l'Esprit de Vitriol pur, ont eu les mêmes phénomènes que ceux qui ont été mis dans le mélange d'Esprit de Nitre & d'Eau commune. Il y a cela de différent: les CrySTALLINS, tant d'Hommes que de Bœufs, sont devenus blanchâtres dans l'Esprit de Vitriol, ils ont moins diminué dans leur pesanteur & dans leurs dimensions, principalement ceux de Bœufs, & ils ne se font fendus qu'après avoir été exposés à l'air & un peu séchés. Les CrySTALLINS d'Hommes ont d'abord nagé sur la liqueur, mais le lendemain ils se font trouvés au fond; les CrySTALLINS de Bœufs ont été au fond de la liqueur aussi-tôt qu'on les y a mis, & sont devenus tous blancs.

La même chose arrive aux CrySTALLINS trempés dans égale partie d'Esprit de Vitriol & d'Eau, mais il faut les y laisser plus longtems. Ils n'ont point diminué de pesanteur, il y en a même qui ont augmenté de 2 grains, jusqu'à 4 grains.

B 7

J'ai

\* V. M. Antoine Mattreij, Descrip. de l'Œil, c. 11. du CrySTALLIN.



J'ai mis des Crystallins de Bœufs dans l'Esprit de Vinaigre, ils ont tous augmenté dans leur poids & leurs dimensions; il y en a quelques-uns qui exposés à l'air, se sont fendus très régulièrement en sechant, mais les autres se sont trouvés irréguliers.

La plupart des Crystallins que j'ai mis dans l'Huile de Vitriol, sont devenus d'un jaune-brun, opaques, mous comme de la pâte, très irréguliers & inégaux à leur surface externe. Si on les expose à l'air, ils deviennent d'un brun noir, & ne se sechent jamais bien, la membrane s'est dissoute; l'Huile de Vitriol dulcifiée les a rendus opaques, blancs.

Le mélange d'égale partie d'Huile de Vitriol & d'Eau commune produit le même effet sur les Crystallins que l'Esprit de Vitriol pur.

Nous venons de voir que les Crystallins trempés 24 heures, plus ou moins, dans les Esprits acides de Vitriol, de Vinaigre, deviennent opaques, blancs, aussi-bien que ceux qui ont trempé dans l'Esprit de Nitre ou de Sel, affoiblis avec de l'Eau. Ces Crystallins se fendent quelquefois dans le tems même qu'ils trempent dans la liqueur, mais pour l'ordinaire ils ne se fendent qu'après en avoir été retirés, & avoir été exposés à l'air pendant quelque tems, & pour-lors ils se fendent plus ou moins régulièrement en plusieurs endroits de leurs surfaces antérieures & postérieures.

Si l'on sépare ces parties les unes des autres, on les trouve à peu près semblables aux piéces d'un Oignon qu'on auroit coupé par son axe en plusieurs parties: on peut les sé-

parer.

parer par pellicules, qui jointes & unies ensemble, forment des enveloppes qui sont emboîtées les unes dans les autres. Chacune de ces pellicules est formée par une infinité de filets courbes & déliés comme des fils de Soye grege, comme je l'ai déjà dit, & assemblés les uns contre les autres à peu près parallèlement.

Tous les CrySTALLINS ne se fendent pas de la même manière. Ceux d'Hommes se fendent de la circonférence au centre; les fentes commencent à se former à la circonférence, & se continuent vers le centre, où le plus souvent elles n'arrivent pas. Il y a rarement de la régularité dans ces fentes. Ceux de Poissons commencent toujours au centre des deux surfaces antérieure & postérieure, & se continuent d'une surface à l'autre.

Les CrySTALLINS des Animaux à quatre pieds, que nous avons disséqués, se fendent aussi du centre de leur surface à la circonférence, le plus souvent assez régulièrement, & ces fentes se trouvent disposées de trois manières différentes, mais toujours en rayons.

Dans la première les fentes se trouvent selon la rectitude des fibres, du centre à la circonférence, qui divisent le CrySTALLIN en trois parties, chacune desquelles est divisée en six autres, dont chacune forme un angle.

Dans la seconde on trouve des CrySTALLINS divisés en trois parties, du centre à la circonférence, mais non pas selon la rectitude des fibres, car la division se fait dans les angles de la première sorte, ce qui fait que chacune de ces trois parties se trouve divisée en douze.

douze parties selon la rectitude des fibres, mais non pas du centre à la circonférence.

Dans la troisième les Crystallins se divisent d'abord en trois parties comme dans la première manière, puis ils se divisent en trois autres semblables à la seconde; mais ces fentes & ces divisions sont rarement régulières; car il se trouve quelquefois plus de divisions, quelquefois moins, ce qui dépend du plus ou du moins d'adhérence des fibres les unes aux autres qui composent le Crystallin.

Quoi qu'il en soit, chaque couche dont le Crystallin est composé, est produite par une fibre, qui en passant & repassant de la partie antérieure à la postérieure, & de la partie postérieure à la partie antérieure, forme le plan de fibres qui produisent ces couches, à peu près de la même manière que Leeuwenhoek\*, qui a donné tant de belles observations faites avec le Microscope, les représente. Il ne dit point qu'il ait mis tremper les Crystallins dans aucune liqueur, & ne dit pas les moyens dont il s'est servi pour les préparer, & rendre ces fibres palpables; il paroît seulement qu'il a examiné ces Crystallins tirés nouvellement des Yeux, & qu'il en a examiné d'autres qui ont été exposés à l'air pendant trois jours. Il s'est sans doute servi du Microscope; quoiqu'il n'en fasse aucune mention: pour moi je n'ai pu découvrir cette structure par aucun Microscope. Je me suis servi de Loupes de 6 à 7 pouces de foyer

\* *Arcan. natur. detect.*, tom. 2. p. 66. de formatione Crystallini.

foyer, pour mieux découvrir les fibres des Crystallins que j'ai mis tremper dans les Esprits acides, mais on peut s'en passer; on peut même se servir de Verre d'un plus petit foyer, selon la disposition des Yeux; il y a des gens qui découvrent mieux les fibres du Crystallin avec un Verre de 2 pouces  $\frac{1}{2}$  & 3 pouces de foyer, qu'avec des Verres qui en ont plus ou moins.



## SOLUTION FORT SIMPLE

D'U N

### PROBLEME ASTRONOMIQUE;

*D'où l'on tire une Méthode nouvelle de déterminer les Nœuds des Planetes.*

Par M. G O D I N. \*

### P R O B L E M E.

**T**ROUVER le point de l'Ecliptique où le mouvement du Soleil en ascension droite est égal à son mouvement en longitude.

† SOLUTION. Soit  $EQ$  un quart de l'Equateur,  $EC$  un quart de l'Ecliptique,  $pPCQ$  le Colure des Solstices,  $p$  le Pole de l'Ecliptique,  $P$  celui de l'Equateur,  $PE$  un Méridien mené par l'un des Equinoxes. Soit  $S$  le

\* 25. Févr. 1710. † Fig. 1.

### 34 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

le point cherché sur l'Ecliptique, &  $T$  un autre point aussi sur l'Ecliptique infiniment proche du premier, &  $TZ$  une portion d'un parallèle à l'Equateur, on aura le petit Triangle  $SZZ$  qu'on peut confiderer comme plan & rectiligne, dont l'angle  $TSZ$  est égal à l'angle  $PSC$  du triangle sphérique  $PSC$ . Si par le point  $T$  on mene un autre Méridien  $PTT$ , la question se réduit à trouver le point  $S$  de l'Ecliptique, tel que l'arc  $ST$  soit égal à l'arc  $RT$  de l'Equateur.

Dans le Triangle sphérique  $PCS$  rectangle en  $C$ , on aura cette proportion,

$$\text{Sin. } PS : \text{Sin. } PC :: \text{Rayon} : \text{Sin. } PSC,$$

& dans le petit Triangle on aura

$$TS : TZ :: \text{Rayon} : \text{Sin. } TSZ = PSC,$$

& parce que  $TR = TS$ ,

$$TR : TZ :: \text{Rayon} : \text{Sin. } TSZ,$$

mais on aura aussi cette autre proportion,

$$TR : TZ :: \text{Rayon} : \text{Sin. } PZ \text{ ou } PS.$$

En comparant les deux dernieres analogies, il suit que le sinus de l'angle  $TSZ$  ou  $PSC$  est égal au sinus de l'arc  $PS$ .

Pour trouver la valeur de cet arc, multipliez par la premiere analogie le sinus de  $PC$  complément de l'obliquité de l'Ecliptique par le Rayon, le produit fera le quarré du sinus de l'arc  $PS$  ou de l'angle  $PSC$ ; & en logarithmes, si l'on ajoute le logarithme du sinus de  $66^{\circ} 31'$  au logarith. du sinus total, la moitié de la somme sera le logarithme du sinus de l'arc  $PS$  qu'on trouvera de  $73^{\circ} 16' 27''$ , son complément  $SR$  fera donc de  $16^{\circ} 43' 33''$  pour la déclinaison du Soleil au point  $S$

au tems de son mouvement en longitude égal à son mouvement en ascension droite, & la distance  $SE$  au plus proche Equinoxe se trouvera par cette analogie.

Sin.  $CQ$  : Sin.  $SR$  :: Sin.  $EC$  ou le Rayon : Sin.  $ES$  qu'on trouvera de  $46^{\circ} 14' 17''$ , & par conséquent  $SC$  de  $43^{\circ} 45' 43''$  à quelques secondes près de ce qui est dans les Tables de M. de la Hire.

Si l'inclinaison de l'Orbite d'une Planete étoit de  $15^{\circ}$ , le point cherché  $S$  seroit éloigné du point  $C$  de  $44^{\circ} 29' 40''$ , & si cette inclinaison étoit de  $1^{\circ}$  seulement, cet arc  $SC$  seroit de  $44^{\circ} 40' 15''$ , car cet arc s'approche d'autant plus de  $45^{\circ}$  que l'inclinaison est petite, & au contraire; pour  $85$  degrés d'inclinaison, par exemple, il est de  $16^{\circ} 18' 50''$ , ce qui paroîtra évident, si l'on considère que le sinus de l'arc  $PS$  doit toujours être moyen proportionnel entre le rayon & le sinus de  $PC$ , car dans la première analogie, en permutant, on aura Sin.  $PC$  : Sin.  $PS$  :: Sin.  $PSC$  = Sin.  $PS$  : Rayon, & par conséquent plus le sinus de  $PC$  approchera de la grandeur du rayon, c'est-à-dire, moins l'arc  $CQ$  ou l'inclinaison de la Planete sera grande, & plus la moyenne proportionnelle  $PS$  approchera aussi du rayon, & par conséquent le point  $S$  du point  $E$ ; ce sera le contraire, si  $PC$  est plus petite.

On se servira de la même Méthode pour toutes les Planetes, suivant les différentes inclinaisons de leurs Orbits à l'Ecliptique & à l'Equateur.

\* Re-

\* *Regiomontanus* a résolu ce Problème par les plus grands & les plus petits rapports entre les sinus des arcs de déclinaison & de leurs complémens, & les sinus des arcs, distances de ces points à l'un des Equinoxes; il trouve  $46^{\circ} 15'$  pour l'arc  $ES$ , ou  $43^{\circ} 45'$  pour  $SC$ ; mais supposant son obliquité de l'Ecliptique de  $23^{\circ} 28'$ , moindre que celle que je suppose de  $23^{\circ} 29'$ , il devoit trouver l'arc  $SC$  plus grand d'une minute entiere ou environ; ce qui doit venir de son calcul.

† *Stevin* a aussi résolu le Problème d'après *Regiomontanus*, & par la même méthode; il a prétendu l'éclaircir, mais il l'a rendu trop diffuse. Il suppose l'obliquité de l'Ecliptique de  $23^{\circ} 51' 20''$ , d'où il trouve l'arc  $SC$  de  $43^{\circ} 43' 16'' \frac{1}{4}$ .

Enfin M. *Parent* en a donné une Solution † dans laquelle il employe le Calcul différentiel: je crois l'avoir résolu plus simplement, & d'une manière plus astronomique.

Dans l'ancienne démonstration de *Regiomontanus*, on suppose que le point  $S$  est tellement pris, que l'arc  $PS$  est moyen proportionnel entre le rayon & le sinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique; mais on n'y démontre pas pourquoi cela donne la solution du Problème.

Dans celle de M. *Parent* il trouve la Tangente de la distance du Solstice au point  $S$ ,

\* *Regiomont. Epitom. Almag. lib. 3. prop. 25.*

Voyez aussi *Kepler. Epitom. lib. 3. p. 258.*

† *Stevin. Hypomnem. mathem. tom. 1. Cosmogr. part. 3. de mot. celest. p. 148. & seq.*

‡ *Mem. de l'Acad. 1704. p. 185.*

$S$ , moyenne proportionnelle entre le rayon & le sinus, complément de l'obliquité de l'Ecliptique; d'où il suit que cette Tangente est égale au sinus, complément de la déclinaison du Soleil au point  $S$  de son mouvement médiocre.

Si l'on connoissoit le lieu du point  $S$  dans l'Ecliptique, indépendamment du lieu des points  $E$  &  $C$ , c'est-à-dire, quelle que fût la longitude de ces points, en connoissant seulement la plus grande distance  $CQ$  de l'Orbe  $EC$  à l'Orbe  $EQ$ , on détermineroit la longitude de ces points  $E$  &  $C$ ; & par conséquent 1°. \* si  $EQ$  représente l'Ecliptique, &  $EC$  l'Orbite d'une Planete, connoissant l'inclinaison  $CQ$  de cet Orbite à l'Ecliptique, on trouvera par la méthode ci-dessus, la valeur des arcs  $SR$ ,  $SC$ , &  $SE$ ; & trouvant par observation le lieu de la Planete en  $S$  dans le tems que son mouvement  $ST$  sur son Orbite est égal à son mouvement en longitude  $TR$  sur l'Ecliptique, ou bien observant ce lieu  $S$  dans le tems que l'inclinaison apparente  $SR$  de la Planete est égale à celle qu'on a déterminée par calcul, on aura aussi le lieu des points  $C$  &  $E$ , c'est-à-dire, des limites & des Nœuds de cette Planete; le Nœud, par exemple, aura une plus grande longitude que le point  $S$  de tout l'arc déterminé  $SE$ , si la latitude de la Planete va en décroissant; & au contraire elle sera moindre, si latitude va en augmentant.

2°. Si  $EC$  est toujours l'Orbite de la Planete,

\* Fig. 1.



te, & que  $EQ$  soit l'Equateur, connoissant par observation la plus grande déclinaison  $CQ$  de la Planete, on déterminera comme ci-dessus les valeurs de  $SR$ ,  $SC$ , &  $SE$ ; observant donc le lieu de la Planete, lorsqu'elle a une déclinaison  $SR$  égale à la calculée, ou lorsque son mouvement sur son Orbite est égal à son mouvement en ascension droite, on aura l'ascension droite du point  $S$  ou  $R$ , & par conséquent celles des points  $E$  &  $C$ , c'est-à-dire, qu'on connoitra le point de l'Equateur où l'Orbite de la Planete le coupe, & le point de l'Equateur auquel répondent les limites de cet Orbite.

Mais connoissant le point où l'Orbite d'une Planete coupe l'Equateur, & le point où l'Ecliptique coupe aussi l'Equateur, on connoitra le point d'intersection de l'Orbite de cette Planete & de l'Ecliptique; il ne faut pour cela que résoudre le Triangle sphérique \*  $AFG$  dans lequel  $AG$  représente l'Equateur,  $AF$  l'Ecliptique, &  $GF$  l'Orbite de la Planete. Dans ce Triangle on connoit le côté  $AG$ , différence d'ascension droite entre  $A$ , l'un des Equinoxes, &  $G$  le point de l'Equateur où il est coupé par l'Orbite de la Planete; l'angle en  $A$  est l'obliquité de l'Ecliptique, & l'angle en  $G$ , ou son supplément, est l'obliquité de l'Orbite de la Planete égale à sa plus grande déclinaison observée; donc on connoitra le côté  $AF$ , distance du Nœud de la Planete à l'un des Equinoxes, & l'angle en  $F$  de l'inclinaison de l'Orbite de cette Planete à l'Ecliptique.

On

\* Fig. 2.

On peut donc trouver le lieu des Nœuds d'une Planete par l'observation de son inclinaison à l'Ecliptique & de sa déclinaison au tems de son mouvement médiocre sur son Orbite par rapport à son mouvement sur l'Ecliptique & à son mouvement en ascension droite.

Mais cette Théorie si simple ne suffit absolument que lorsqu'on est au centre des Cercles \*  $EC$  &  $EQ$ , & que les arcs  $CQ$ ,  $SR$ , sont les véritables latitudes ou déclinaisons, & qu'elles sont invariables, c'est-à-dire, non sujettes à des inégalités optiques: elle ne convient donc, par rapport à la recherche des Nœuds des Planetes, qu'à un Observateur qui seroit dans le Soleil supposé immobile au centre du mouvement de ces Planetes. De ce centre seul les arcs  $CQ$  &  $SR$  mesurent les véritables inclinaisons des points  $C$  &  $S$ ; car comme les plus grandes latitudes ou déclinaisons  $CQ$ , vues de la Terre, sont variables suivant le plus ou le moins de distance de la Terre à la Planete, le point  $S$  & par conséquent le lieu du Nœud  $E$  auroient autant de positions différentes que  $CQ$  auroit de différentes valeurs. Donc les plus grandes latitudes ou déclinaisons, vues de la Terre, ne peuvent servir à la solution de ce Problème, si ce n'est lorsqu'elles sont égales à ces mêmes choses vues du Soleil, c'est-à-dire, lorsque la Planete posée dans ses limites, est également éloignée du Soleil & de la Terre, ou en quadrature environ avec le Soleil, ce qui est un cas fort rare.

Ce-

\* Fig. 1.

Cependant, comme la détermination des Nœuds des Planetes est très importante, & qu'on ne sauroit avoir trop de Méthodes pour arriver au même but, lorsque chacune a sa difficulté, voici de quelle maniere j'emploie celle-ci à cette recherche.

Je suppose seulement que l'on connoisse la Théorie du Soleil ou de la Terre, & les distances de la Planete au Soleil, d'où suit la connoissance de ses distances à la Terre.

\* Soit  $S$  le Soleil,  $T$  la Terre.  $APL$  est l'Orbite d'une Planete posée en  $P$ .  $ARM$  est l'Ecliptique. Le point  $A$  un des Nœuds de la Planete. Connoissant  $LM$  la plus grande inclinaison de l'Orbite de la Planete à l'Ecliptique vue du Soleil, on trouvera, comme ci-dessus, l'inclinaison  $PK$  vue du Soleil telle que la Planete posée en  $P$  paroitra décrire sur son Orbite un arc égal à son arc correspondant sur l'Ecliptique. Si l'on prend donc, de la maniere dont on va dire, le lieu de la Planete sur l'Ecliptique en  $R$  par rapport au premier point d'Aries, dans le moment que cette Planete a l'inclinaison calculée, dans le Triangle sphérique  $APR$  rectangle en  $R$ , on connoit le côté  $PR$ , & l'Angle en  $A = LM$ : on connoitra donc  $AR$ , & par conséquent le lieu du Nœud  $A$  sur l'Ecliptique, vu du Soleil.

Je suppose donc que l'on observe continuellement les latitudes apparentes de la Planete, c'est-à-dire, l'angle  $PTR$ , & que par les distances connues du Soleil à la Terre & à la Planete, on détermine laquelle de toutes

tes les latitudes  $PR$  observées, est égale à l'inclinaison calculée vue du Soleil, en ce cas le point  $P$  fera celui d'égalité du mouvement de la Planete sur son Orbite, & en longitude sur l'Ecliptique; & si l'on observe dans le même moment le lieu de la Planete sur l'Ecliptique en  $R$ , vu de la Terre, qui donnera l'angle  $CTR$ , on aura, en résolvant le Triangle  $RST$ , dont les trois côtés & l'angle en  $T$  sont connus, l'angle  $RST$  qui comparé avec le lieu héliocentrique de la Terre, donnera la véritable longitude héliocentrique de la Planete réduite à l'Ecliptique; d'où l'on conclura, comme ci-dessus, le vrai lieu de la Planete.

Pour les Planetes qui ont des Satellites, le Problème devient en certains cas plus facile, car on peut quelquefois y déduire immédiatement de l'observation ce qu'on vient de déterminer par les distances, qui est ce qu'on appelle la seconde inégalité de la Planete; car si l'on fait assez précisément le tems de la révolution périodique d'un Satellite autour de sa Planete, on observera très aisément la valeur de l'arc  $OE$  de l'Orbite du Satellite compris entre le milieu  $O$  de sa demeure dans l'ombre de la Planete & le point  $E$  où il paroît vu de la Terre en conjonction avec sa Planete; cet arc est égal à l'angle  $TPS$ ; ainsi dans le Triangle  $TPS$ , on connoît  $ST$  l'angle  $TPS$  & l'angle  $STP$ , différence entre les lieux apparens du Soleil & de la Planete; on connoitra donc le côté  $TP$ : & dans le Triangle  $RTP$  rectangle en  $R$ , on connoît l'angle en  $T$  & le côté  $TP$ ;

*Mem.* 1730.

C

donc

donc on connoitra  $TR$ . Enfin dans le Triangle  $RTS$  on connoit  $ST$  &  $TR$ , & l'angle compris  $STR$ , ce qui donnera l'angle  $RST$ , difference de longitude entre la Terre & la Planete vues du Soleil; d'où l'on conclura, comme ci-devant, le vrai lieu du point  $A$ , Nœud de la Planete.

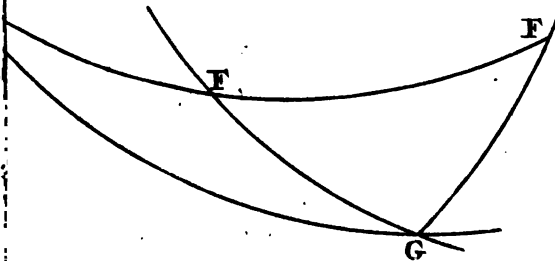
Je suppose ici, comme on voit, qu'on puisse observer l'immersion & l'émerfion du Satellite de l'ombre de sa Planete, ce qui ne se peut pas dans tous les Satellites, dans le premier de Jupiter, par exemple, & très rarement dans le second.

On trouvera de la même maniere le point de l'Equateur où il est coupé par l'Orbite d'une Planete vue du Soleil.

Par ces Méthodes on multiplie les points des Orbites des Planetes qui peuvent servir à déterminer la position de leurs Nœuds; par la Méthode ordinaire, qui est d'observer la Planete proche de ses Nœuds mêmes lorsque sa latitude change de dénomination dans l'espace de quelques jours, on n'a, dans toute la révolution d'une Planete, que deux occasions favorables de faire ces observations; & il faut, de même que nous venons de faire, y supposer les distances de la Planete à la Terre & au Soleil, pour changer les latitudes apparentes & la position apparente du Nœud en inclinaisons & en vrai lieu héliocentrique du Nœud.

Il reste à donner, dans une suite, quelques exemples de ces Méthodes pour différentes Planetes, fondées sur des observations, afin qu'on puisse plus sûrement juger  
du

*Fig. 2.*



Q



du degré de précision qu'on en peut attendre.



*M E M O I R E*  
*SUR LE SEL LIXIVIEL*  
*DU GATAC.*

Par M. B O U R D E L I N . \*

**D**ANS le Mémoire que je présentai en 1728 à l'Académie, sur la formation des Sels alkalis, je tâchai de prouver que ces Sels n'étoient que des Sels décomposés; & que si la partie grasse des Végétaux contribuoit à leur formation, ce n'étoit qu'en enlevant au Sel essentiel une grande partie de ses Acides, & point du tout en s'unifiant avec ce même Sel essentiel, comme le veut M. Stahl, & comme il prétend le prouver par une expérience que je rapportai d'après lui, & de laquelle je tirai des conséquences toutes différentes, & tout-à-fait opposées à celles qu'il en tire. Dans le même Livre, le même Auteur rapporte une expérience assez singulière, concernant ce sujet. On a cru jusqu'ici que le feu formoit seul les Sels alkalis que l'on tire des matières végétales; que cet Agent n'avoit besoin, pour former ces Sels, d'aucune aide de la part du Chymiste,

\* 28 Janvier 1730.

C 2

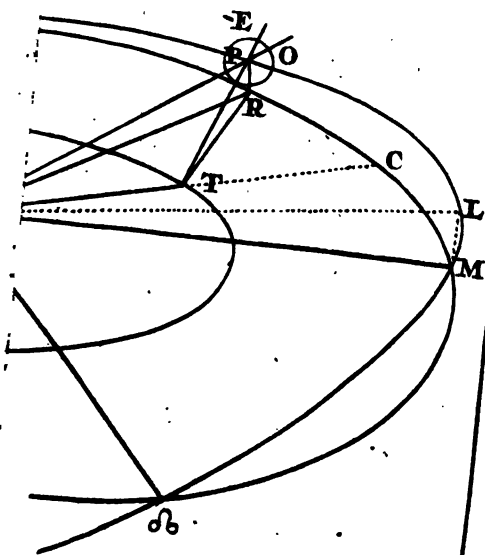


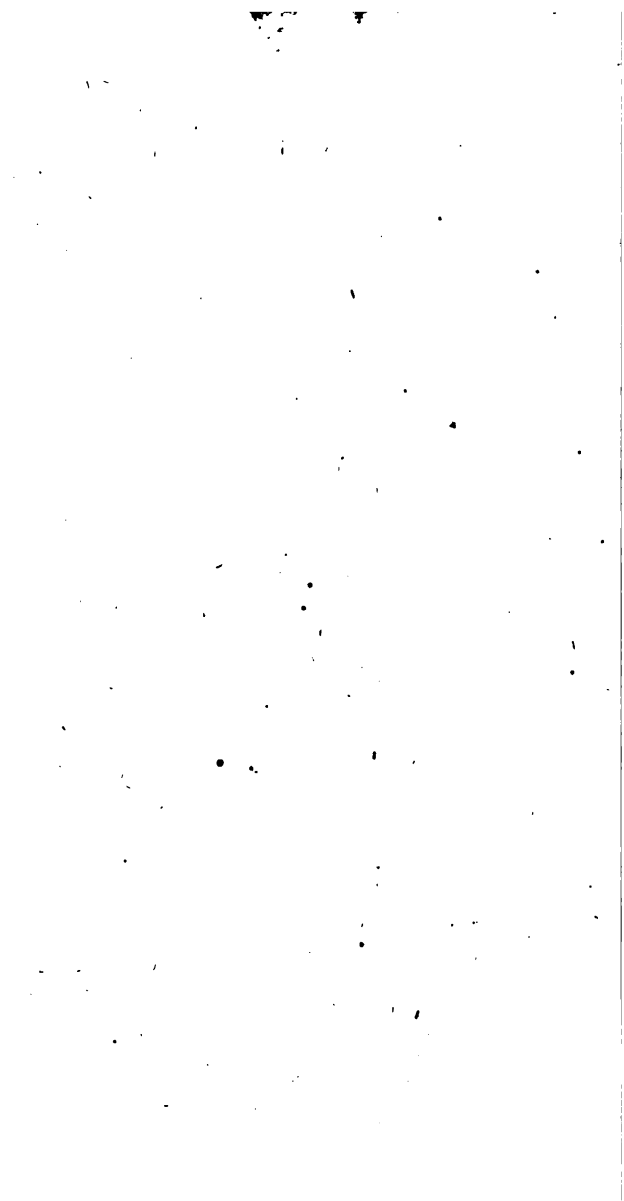
misse, ni d'aucune préparation; & qu'il fuffoit de lui livrer une Plante desséchée, pour qu'il formât, en la détruisant, autant de Sel lixiviel qu'elle contenoit de matière propre à s'alkalifer. Mais dans l'expérience de M. Stahl la chose se passe différemment; le Chymiste paroît avoir grande part à la production du Sel alkali; ce n'est qu'après que son industrie a tiré du Mixte les matériaux nécessaires pour la composition de ce Sel, qu'il les a rapprochés, & pour ainsi dire, présentés l'un à l'autre, que le feu les combine, les unit plus étroitement, & opere par ce moyen, & avec ce secours, une production de Sel alkali bien plus abondante. Voici le fait.

M. Stahl fait remarquer, en parlant des Sels alkalis, qu'il y a quelques Végétaux qui n'en donnent pas tant par l'opération ordinaire, c'est-à-dire, lorsque l'on se contente de les faire secher & de les brûler, que lorsqu'on s'y prend d'une autre façon. „ Il rap-  
 „ porte pour exemple le bois de Gayac, dont  
 „ on ne tire, dit-il, par l'incinération seule,  
 „ que très peu de Sel alkali; mais si l'on  
 „ prend, dit M. Stahl, les râpures de ce  
 „ même bois, qu'on les fasse bouillir un cer-  
 „ tain tems, que l'on en fasse évaporer la  
 „ décoction lentement, & jusqu'à siccité, la  
 „ matière qui reste, étant brûlée & légère-  
 „ ment calcinée, donne infiniment plus de  
 „ Sel fixe.” Voilà l'expérience de M. Stahl, voyons l'explication qu'il en donne.

„ Pour expliquer ce phénomène, dit M.  
 „ Stahl, il est probable que les parties sali-  
 „ nes nitreuses qui sont contenues dans le  
 „ Gayac,

7. 3.





Gayac, y sont logées séparément & à quelque distance des parties huileuses qui sont renfermées dans leurs petites loges particulières. Cela fait que dans l'instant de la déflagration, le feu pousse & chasse hors du Mixte séparément les parties salines & les parties huileuses, qui par ce moyen ne peuvent pas se toucher, se joindre, brûler ensemble, & ainsi se combiner pour composer le Sel alkali ; au-lieu que si, par la coction, on tire de leurs cellules chacun de ces deux principes, en sorte qu'ils puissent se confondre librement ensemble dans l'eau, & que par le moyen de l'épaississement de la matière qui reste après l'évaporation poussée jusqu'à siccité, les particules salines & huileuses puissent s'accrocher ensemble, & se mêler les unes avec les autres, & qu'alors on brûle cette matière, l'action du feu peut combiner plus facilement les deux principes qui dans cet état se touchent immédiatement, & de cette combinaison suit l'effet qu'on doit attendre, c'est-à-dire, la production du Sel alkali. M. Stahl, dans cette explication de son expérience, ne s'écarte point de ses principes, & déduit toujours la formation du Sel alkali d'une Plante, du mélange & de l'union intime & durable qui se fait du Sel essentiel de cette Plante avec sa partie grasse par le moyen du feu, & dans le sein du feu.

Il y a plusieurs choses dans cette explication, qu'un Lecteur attentif ne sauroit aisément passer. Mais, sans entrer dans un plus grand détail, sur quel fondement M. Stahl suppo-

se-t-il une distance si éloignée entre les particules salines & huileuses dans le bois de Gayac? Quelle preuve en pourroit-il apporter? Si l'on regarde le Gayac comme les autres Plantes, c'est-à-dire, comme un assemblage de Vaisseaux ou de Tuyaux arrosés par des liqueurs, dans lesquelles tous les principes de la Plante, & par conséquent l'Huile & le Sel essentiel, sont déjà renfermés, & pour ainsi dire, combinés par la Nature, on accordera difficilement à M. Stahl les differens logemens, & les cellules écartées qu'il assigne à ces deux principes. M. Stahl alléguera-t-il en sa faveur une apparence d'analogie qui peut se rencontrer entre les Plantes & les Animaux, dans lesquels, par le moyen des sécrétions, différentes humeurs se trouvent renfermées séparément dans differens réservoirs? Mais pour-lors on sera en droit de pousser l'analogie plus loin, & de dire, que comme dans les Animaux il se trouve par-tout de l'Huile & du Sel mêlés ensemble, il doit aussi s'en trouver par-tout dans les Plantes. Il est bien vrai que dans certaines liqueurs des Animaux, on découvre distinctement que certains principes y dominent. Mais ces mêmes principes s'y trouvent-ils dans leur première simplicité, s'y trouvent-ils totalement dégagés les uns des autres? Rencontre-t-on, par exemple, du Sel pur, de l'Huile pure? Les graisses des Animaux ne contiennent-elles pas du Sel, même en assez grande quantité? Dans la Bile, toute sulphureuse qu'elle est, ne démêle-t-on pas, même par le seul goût, le Sel qui

qu'y est mêlé? Avanceroit-on avec raison que dans la Salive il ne se trouve purement & simplement que du Sel? De même dans les Plantes, leurs suc les plus aqueux en apparence, ne contiennent-ils que du Sel, ne s'y rencontre-t-il pas quelque portion d'Huile? Quoique la Réfine soit la partie grasse des Plantes, cette Réfine n'est-elle purement que de l'Huile? Quand on la brûle, ne donne-t-elle pas du Sel alkali? preuve qu'elle contient une portion de Sel essentiel qui se décompose dans le feu. Mais si, dans les Végétaux, comme dans les Animaux, la partie saline & la partie grasse se trouvent mêlées ensemble, même dans les liqueurs dans lesquelles on auroit le plus lieu de croire qu'elles existent séparément l'une de l'autre, que doit-on penser de tout le corps de la Plante en général, dont les canaux contiennent les Sucrs qui sont l'origine & la source de toutes les sécrétions qui se font dans la Plante, comme le Sang l'est de celles qui se font dans l'Animal, & dans lesquels par conséquent ces deux principes sont contenus confusément, avant de se séparer pour être renfermés dans leurs differens réservoirs? M. Stahl ne nie pas non plus qu'il se rencontre du Sel & de l'Huile combinés ensemble dans toute l'étendue de la Plante, puisqu'il avoue qu'en brûlant le Gayac à la façon ordinaire, on en tire du Sel alkali, mais on l'en tire, dit-il, en moindre quantité. La difficulté ne roule donc que sur le plus ou le moins, & le Gayac donne moins de Sel alkali par ce procédé, parce que la distance éloignée qui se rencontre, selon M.

MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

Stahl, entre l'Huile & le Sel dans ce bois, fait qu'une grande partie de ces deux principes échape au mélange & à la combinaison que le feu en feroit, s'ils étoient plus rapprochés, & si toute l'Huile requise pour la formation du Sel lixiviel pouvoit se combiner avec tout le Sel essentiel.

Je n'opposerai à ce raisonnement que l'expérience que fournit le Nitre fixé par les Charbons. Ce Sel ne s'alkalise que par le moyen de la poudre de Charbon que l'on y jette, lorsqu'il est en fusion dans le Creuset qui le contient. Il se fait, pour-lors, une liaison étroite & une union de la partie grasse du Charbon avec l'acide du Nitre qu'elle emporte avec elle, & à qui elle fait suivre la même détermination de mouvement qu'elle a reçu du feu, & qu'elle suit elle-même, comme j'ai tâché de le prouver dans mon Mémoire de 1728. Il se fait donc, avant cette fuite de l'Acide nitreux, une liaison de la partie grasse du Charbon avec ce Sel. Mais pourquoi la même chose n'arrivera-t-elle pas entre l'Huile & le Sel essentiel d'une même Plante? L'Acide du Nitre & la partie grasse du Charbon sont deux substances tout-à-fait étrangères l'une à l'autre, cependant elles s'unissent lorsque l'on jette la poudre de Charbon dans le Creuset; tout le Nitre qui y est contenu se décompose, & devient du Sel alkali. Est-il vraisemblable qu'il se trouve plus de proximité entre ces deux substances, qu'il ne s'en trouve entre deux pareils principes renfermés dans une même Plante, & que la Nature avoit intimement mêlés & combinés dans

dans les liqueurs & le suc nourricier qui a servi à la végétation, l'accroissement & la conservation de cette Plante ? Que l'on explique la formation du Sel alkali par l'union fixe & durable de la partie grasse avec le Sel essentiel entier, selon l'hypothese de M. Stahl; ou qu'on l'explique, selon la mienne, par la liaison qui se fait de cette même partie grasse avec l'Acide seulement du Sel essentiel, lequel Acide est emporté par elle; toujours, selon l'un ou l'autre sentiment, se fait-il une union étroite, & toujours sera-t-on fondé à demander pourquoi cette union se fait entre deux matieres tout-à-fait étrangères l'une à l'autre, & pourquoi elle ne se feroit pas entre deux semblables substances, qui sont déjà rassemblées & mêlées ensemble dans un même Végétal. Mais passons du vraisemblable au vrai; après avoir réfuté sommairement l'explication de M. Stahl, suivons son expérience, & examinons-en la vérité.

La première fois que je lus avec attention l'expérience de M. Stahl, sa singularité fit naître en même tems ma surprise & mes doutes. Je trouvois qu'il y avoit de l'industrie à remédier ainsi à l'empêchement que la Nature sembloit avoir formé dans le Gayac à une production abondante de Sel alkali. Mais je n'étois pas bien convaincu de la réalité de l'obstacle, ni de l'efficacité du remède qu'on y apportoit. Malgré la grande réputation que s'est acquis M. Stahl, & qu'il s'est acquis à juste titre, la confiance que j'avois à une expérience qu'il citoit, & que je devois supposer qu'il avoit faite, ne put jamais aller jus-



qu'à me persuader que la simple décoction du Gayac dût apporter un si grand changement dans la quantité de Sel fixe qu'on en tire. Je ne concevois pas que l'Eau bouillante seule, soit comme échauffée par le feu, soit comme composée de parties qui à l'aide du feu pussent s'insinuer dans les pores d'un Mixte, eût assez d'efficacité pour tirer d'un bois, dont le tissu est aussi serré & aussi dense que l'est celui du Gayac, une si grande quantité de Sel essentiel. La peine que j'avois à concilier mes idées avec l'expérience de M. Stahl, me fit prendre le parti de la réitérer d'après lui. Mais comme il ne suffisoit pas de tirer le Sel alkali de la décoction résineuse du Gayac, & qu'il falloit le comparer avec celui que fourniroit une pareille quantité de Gayac brûlé à la façon ordinaire, j'en ai brûlé de trois façons différentes. J'ai brûlé le Gayac en morceaux, comme on le fait ordinairement; j'en ai brûlé en râpures; & enfin j'ai fait bouillir, pour mon expérience, des râpures de Gayac, desquelles j'ai tiré la Réfine par ce moyen, & ces mêmes râpures bouillies & dépouillées de leur partie grasse, je les ai fait sécher, & les ai brûlé ensuite.

De quelque façon que j'aye brûlé le Gayac, soit en râpures qui eussent bouilli, soit en râpures qui n'eussent point bouilli, soit en substance, je veux dire en morceaux, j'en ai toujours brûlé six livres à la fois. De ces trois façons différentes, la plus simple fut celle qui me donna à la première opération le plus de Sel lixiviel. Six livres de Gayac  
brû-

brulé en morceaux m'en fournirent un gros & 7 grains, c'est-à-dire, 79 grains. Pareil poids de râpures ne me donna que 39 grains. Je n'insisterai point ici sur la raison qui fit que les râpures me donnerent moins de Sel que le bois. Je dirai seulement que je crois qu'il y eut de ma faute, parce que je ne lessivai leurs cendres que deux fois, & peut-être une troisième ou une quatrième lessive m'auroient-elles donné encore assez de Sel lixiviel pour égaler la quantité que m'en avoit fourni le Gayac brûlé en morceaux.

Je pris six autres livres de Gayac en morceaux, je le brûlai, je le réduisis en cendres, que je calcinai ensuite dans le Creuset; elles ne me fournirent en deux évaporations que 51 grains de Sel, savoir 45 grains à la première, & 6 à la seconde. Je pris ensuite des râpures de Gayac, que j'avois fait bouillir pendant six heures, & qui pesoient six livres avant l'ébullition. Je les fis sécher pour les brûler. Leurs cendres calcinées & lessivées me fournirent en trois évaporations 58 grains de Sel lixiviel. On voit par-là que si dans la première expérience le Gayac en morceaux l'avoit emporté par le produit du Sel lixiviel sur les râpures, dans celle-ci les râpures, quoique bouillies, & qui devoient avoir perdu une partie de leur Sel, l'ont cependant réciproquement emporté sur le bois.

Quand même j'aurois été bien persuadé de la vérité & de l'exactitude de l'expérience de M. Stahl, cette seule circonstance auroit suffi pour faire naître mes doutes. Les râpures de Gayac bouillies & séchées, res-

sembloient trop par leur produit au bois de Gayac brûlé en morceaux, & en approchoient de trop près, pour que je pusse attendre de la matière résineuse, provenant de la décoction épaissie, une quantité considérable de Sel lixiviel. Car comme il ne pouvoit se trouver de Sel dans cet extrait résineux, qu'à proportion de ce que pouvoient lui en avoir communiqué les râpures de Gayac, & par conséquent à proportion de ce qu'elles en avoient perdu, il n'étoit pas naturel d'attendre de cette matière résineuse une grande quantité de Sel lixiviel, lorsque les râpures, qui avoient fourni dans la décoction cette même Réfine, conservoient encore tant de Sel. J'aurois eu quelque sujet de me flater plus justement de l'espérance que donne M. Stahl, si j'avois vu que l'ébullition eût dépouillé mes râpures de Gayac de leur Sel, au point qu'elles ne m'en eussent presque pas fourni en les brûlant, après les avoir fait sécher. Pour-lors il y auroit eu quelque raison d'attendre de la décoction épaissie la multiplication considérable de Sel fixe que M. Stahl en promet. Car à s'en rapporter aux termes dans lesquels s'exprime M. Stahl, il semble que le Gayac, dont on a tiré la teinture ou l'extrait par le moyen de l'ébullition, devienne, pour ainsi dire, une Tête-morte, & une matière absolument dénuée de tout son Sel, & que tout ce Sel passe dans la décoction, dans laquelle il doit produire par l'incinération, en se combinant avec la partie grasse, une quantité de Sel lixiviel infiniment, & sans aucune comparaison, plus considéra-

doutable que n'en donne le Gayac brûlé à la façon ordinaire. Que M. Stahl regarde les râpures de Gayac qui ont bouilli comme une Tête-morte dénuée de son Sel essentiel, il n'y a presque pas lieu d'en douter; il paroît en faire si peu de cas, que, uniquement attentif au produit de l'extrait, il semble rejeter comme inutiles les râpures qui l'ont fourni, & ne conseille même pas de les brûler après en avoir tiré la Réfine & le Sel par le moyen de la décoction. Il me reste maintenant à détailler mon expérience, telle que je l'ai faite d'après M. Stahl.

Je pris six livres de râpures de Gayac. Je les fis bouillir pendant six heures. J'en fis évaporer la décoction jusqu'à fécité. Il me resta de cette évaporation 7 gros de matière résineuse, & ces 7 gros de matière résineuse ne me donnerent, par la calcination & la lessive des cendres, que 4 grains de Sel lixiviel. Quoique la quantité de Sel lixiviel que m'avoient donné mes râpures bouillies & séchées, eût commencé à me faire soupçonner le peu que m'en fourniroit leur résidu résineux, un reste de préjugé pour une expérience citée par M. Stahl, & que je devois croire qu'il avoit fait lui-même, me tenoit encore en suspens; & j'avouerai que je vis avec surprise combien ma méfiance fut justifiée. J'avois travaillé auparavant de la même manière douze livres de râpures de Gayac. J'en avois tiré 10 gros d'extrait résineux, qui ne m'avoient produit que 14 grains de Sel lixiviel. Mais il m'étoit arrivé un accident en faisant cette opération. Un grand Vaisseau de ter-

mais cela ne répondoit cependant pas, à beaucoup près, aux promesses de M. Stahl, ni au produit des fix livres de râpures que je venois récemment de brûler sans les avoir dépouillé de leur partie grasse. Il y avoit encore loin de 32 à 90. J'étois bien sûr de mes râpures, elles étoient les mêmes; ainsi je devois en obtenir au moins la même quantité de Sel lixiviel par le procédé de M. Stahl, que par le mien. Cependant, tout le produit de la Réfine calcinée & lessivée se bornoit à 32 grains. Il falloit donc que les râpures, qui avoient bouilli, conservassent ce qui manquoit de Sel à la décoction épaissie. Pour m'en assurer, j'eus encore recours à la calcination des cendres des râpures dont j'avois tiré la Réfine. Six livres de ces râpures que j'avois employé pour la décoction, s'étoient réduites à cinq. Elles étoient beaucoup plus brunes que les autres qui m'étoient restées des opérations précédentes. Je brûlai ces cinq livres; les cendres qui en provinrent, ayant été bien calcinées, devinrent d'une couleur approchante d'un chamois un peu foncé. Elles se réduisirent en une poudre aussi fine que si elle eût été porphyrisée, & qui s'envoloit pour peu qu'on remuât le Creuset qui les contenoit. Ces cendres ne se pelotonnerent point, comme le font ordinairement; sur la fin de la calcination, celles qui contiennent beaucoup de Sel lixiviel. Leur secheresse & leur legereté me fit mal augurer d'abord de leur richesse, cependant ma prévention se trouva mal fondée. Ces cendres, tout arides qu'elles paroiss-

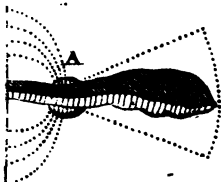
soient;

soient, m'ont donné un tiers & presque moitié plus de Sel lixiviel que celles du résidu résineux. J'ai fait de chacune de ces trois sortes de cendres six lessives. Les râpures qui n'avoient point bouilli, & qui avoient été brûlées à la façon ordinaire, m'ont donné en tout 130 grains de Sel lixiviel. Les râpures qui avoient bouilli pendant douze heures entières, & dont j'avois tiré la Réfine, m'ont donné 78 grains. Et l'extrait résineux provenant de ces mêmes râpures bouillies, & duquel M. Stahl promet un produit si abondant, ne m'a donné que 47 grains & demi de Sel lixiviel.

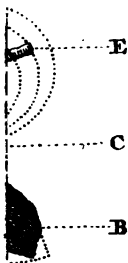
Il est aisé de voir, par le détail de cette dernière expérience, que j'avois eu quelque raison de douter de l'exactitude & de la vérité de celle que rapporte M. Stahl. Tant s'en faut que les cendres de l'extrait résineux ne l'emportent par l'abondance de leur Sel lixiviel sur celles des râpures de Gayac brûlé à la façon ordinaire, qu'au contraire elles le cèdent en quantité, même aux cendres des râpures qui ont bouilli, desquelles cet extrait résineux est le produit. Il ne se trouve donc plus rien d'étonnant ni de mystérieux dans l'opération de M. Stahl. La décoction emporte une partie du Sel essentiel du Gayac, & le confond avec la partie grasse de ce bois; de-là il résulte dans la décoction épaissie, autant de Sel fixe que l'ébullition a ôté de Sel essentiel aux râpures. Ce qui en est resté aux râpures après l'ébullition, se retrouve en Sel lixiviel dans leurs cendres. Ainsi, tirer le Sel lixiviel du Gayac

à la façon de M. Stahl, ce n'est que diviser un tout en deux parties, c'est obtenir par deux opérations ce qu'on peut obtenir par une seule, c'est augmenter la peine sans augmenter le profit.

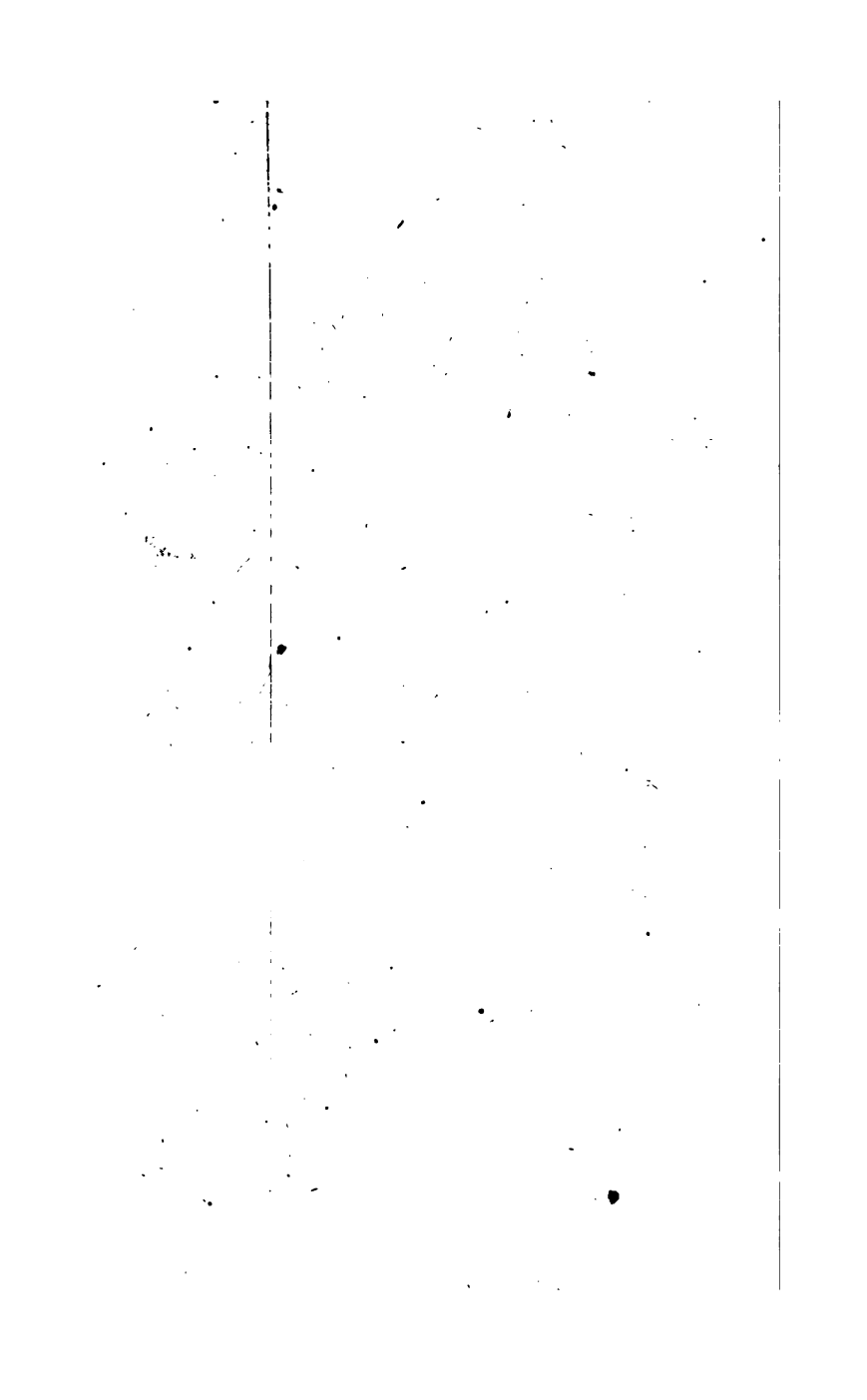
On me demandera peut-être, d'où vient que les cendres du Gayac qui a été brûlé à la façon ordinaire, ont donné seules plus de Sel lixiviel que celles des râpures bouillies & de l'extrait résineux jointes ensemble, puisque celles-ci ont fourni quatre grains & demi moins que les autres. La réponse est aisée à faire. Après l'évaporation d'une lessive, on a beau gratter le vaisseau dans lequel elle a été faite, quelque soin que l'on prenne, il y reste toujours un peu de Sel, & cette petite quantité du Sel lixiviel qui s'attache au vaisseau est proportionnée à l'étendue de la surface de ce même vaisseau. Quelque peu sensible que paroisse ce déchet dans une seule évaporation, il doit le devenir, & augmenter après plusieurs opérations. Les râpures de Gayac, qui m'ont servi dans ces dernières expériences, étoient les mêmes, puisque je n'avois fait qu'en partager douze livres en deux parts. Elles devoient par conséquent contenir autant de Sel les unes que les autres. Mais ces trois sortes de cendres ont été lessivées chacune six fois, comme je l'ai déjà dit. Regardons maintenant les cendres du résidu résineux & celles des râpures bouillies, comme deux parties ne faisant qu'un même tout, c'est-à-dire, comme les cendres de six livres de Gayac. Il s'ensuivra que ces cendres-ci ont souffert le dé.



*Medinella marina.*







déchet de douze operations, pendant que celles des six livres qui ont été brulées à la façon ordinaire, n'ont souffert que le déchet de six évaporations. Supposé que celles-ci aient perdu à chaque évaporation trois quarts de grain de Sel lixiviel, ce qui est peu de chose, & ce qui fera en tout quatre grains & demi pour les six évaporations, il s'ensuivra que les autres en auront perdu neuf.

Je ne dirai rien ici sur la nature du Sel lixiviel du Gayac. J'ai cru avoir lieu de penser, pour plusieurs raisons, qu'il n'étoit gueres alkali, peut-être même pourroit-il se faire qu'il ne le fût point du tout. En ce cas, M. Stahl auroit bien perdu de la peine à en expliquer la formation. Je n'ose pourtant pas encore prononcer que ce Sel ne soit absolument point Alkali. Mais ce que je puis avancer avec certitude, c'est que s'il l'est, il l'est peu. Je renvoye cette discussion à un autre Mémoire, dans lequel je me propose d'examiner les varietés qui se rencontrent entre differens Sels lixiviels.

*EXAMEN ET RESOLUTION  
DE QUELQUES QUESTIONS  
SUR LES JEUX.*

Par M. NICOLE. \*

**O**N peut considérer tous les Jeux, que l'amusement ou le desir d'augmenter son argent ont inventés, sous deux especes. La premiere espece renferme les Jeux où le hazard seul a part, & qui par leur nature mettent les Joueurs dans différentes conditions, en sorte que l'un ait avantage sur l'autre, comme dans les Jeux de la Bassette, du Pharaon, & des Trois Dés, &c. La seconde espece renferme les Jeux où le hazard étant égal pour les Joueurs, comme dans le Piquet, &c. les forces ou degrés d'habileté entre les Joueurs sont differens.

Entre les divers Problèmes que l'on peut proposer sur chacune de ces deux especes de Jeux, il y en a qui leur sont communs, la plus grande probabilité de gagner pour l'un des Joueurs, pouvant venir également de la nature du Jeu qui lui donne de l'avantage, ou de la supériorité d'habileté.

La question que l'on examine ici est de cette espece, elle m'a été faite plusieurs fois par

par de gros Joueurs : la voici.

Deux Joueurs jouent une partie à un Jeu quelconque, par exemple, au Piquet; l'un des Joueurs a plus de probabilité de gagner cette partie, qu'il n'en a de la perdre; on demande, lorsque ces Joueurs conviennent de jouer un certain nombre de parties, si le Joueur supérieur a toujours le même avantage sur l'autre, ou le même degré de probabilité de gagner plus de parties que l'autre; ou si cette probabilité augmente, on demande selon quelle loi se fait cette augmentation.

### PROBLÈME.

*Deux Joueurs, dont les forces sont entre elles comme  $p$  &  $q$ , jouant au Piquet un certain nombre de parties : on demande quelle probabilité il y a que le Joueur le plus fort gagne, ce que les Joueurs appellent la queue des paris, & quel est son avantage. Celui qui perd, est celui qui est marqué le plus de fois dans le cours des parties que l'on est convenu de jouer.*

Pour résoudre ce Problème, il faut découvrir d'abord quel est l'avantage de ce Joueur, lorsque l'on ne joue que deux parties, ensuite lorsque l'on en joue quatre, puis six, huit, dix, & enfin le nombre dont on est convenu. Car il est clair que son fort, lorsque l'on en joue douze, par exemple, doit résulter de l'examen des différens états dans lesquels cette partie de Jeu peut se trouver dans tout le cours de ces douze parties, & que quelques-uns de ces états

## 62 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

états répondent à la situation où seroient les deux Joueurs, s'ils ne jouoient qu'en deux parties, ou en quatre, six, huit & dix.

### SOLUTION.

J'appelle *Pierre* le premier Joueur, dont la force est exprimée par  $p$ , & *Paul* le second Joueur, dont la force est exprimée par  $q$ ;  $p$  est plus grand que  $q$ .

Soit supposé qu'ils jouent d'abord en deux parties, soit nommé  $a$  l'argent que l'on gagne, lorsque l'on gagne le pari. Cela posé:

Si l'on nomme  $f$  le fort de Pierre que l'on cherche,  $x$  son fort lorsqu'il gagne la première partie, &  $y$  lorsqu'il la perd, on aura

$$\text{ces Equations, } f = \frac{1.0 \quad 0.1}{p+x+q \times y}, x = \frac{2.0 \quad 1.1}{p+a+q \times 0}$$

$$\& y = \frac{1.1 \quad 0.2}{p \times 0 + q \times a}, \text{ dans lesquelles les nom-}$$

bres qui sont écrits au-dessus de chaque membre de ces Equations, servent à exprimer ce que chaque Joueur a gagné de parties. Donc

$$f = \frac{p \times a p + q \times a q}{p+q} = \frac{a p p - a q q}{p+q}, \text{ qui est le}$$

fort de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en deux parties.

Soit supposé maintenant que ces Joueurs jouent en quatre parties.

Si l'on nomme  $f$  le fort de Pierre que l'on cherche,  $x$  son fort lorsqu'il gagne la première partie,  $y$  lorsqu'il la perd;  $z$  son fort, lors-

lorsqu'ayant gagné la première partie, il gagne encore la seconde; & son fort, lorsqu'ayant gagné les deux premières parties, il perd la troisième, on aura ces Equations,

$$f = \frac{p \times x + q \times y}{p + q}, \quad x = \frac{p \times a + q \times \frac{a p p - a q q}{p + q}}{p + q}$$

$$z = \frac{p \times a + q \times r}{p + q}, \quad r = \frac{p \times a + q \times \frac{a p p - a q q}{p + q}}{p + q} = \frac{a p}{p + q}. \text{ Donc}$$

$$z = \frac{a p}{p + q} + \frac{a p q}{p + q} = \frac{a p p + 2 a p q}{p + q} \quad \&$$

$$w = \frac{a p^3 + 2 a p p q + a p p q - a q^3}{p + q} = \frac{a p^3 + 3 a p p q - a q^3}{p + q}$$

Pour déterminer  $y$ , soit encore nommé  $s$  le fort de Pierre, lorsqu'ayant perdu la première partie, il perd encore la seconde; & son fort, lorsqu'ayant perdu les deux premières parties, il gagne la troisième; on aura ces nouvelles Equations,

$$y = \frac{p \times \frac{a p p - a q q}{p + q} + q \times s}{p + q}, \quad s = \frac{p \times a + q \times \frac{a p p - a q q}{p + q}}{p + q}$$

$$s = \frac{p \times a + q \times \frac{a p p - a q q}{p + q}}{p + q} = \frac{q a}{p + q}. \text{ Donc } t =$$

$$\frac{a p q}{p + q} - \frac{q a}{p + q} = \frac{2 a p q - a q q}{p + q}, \quad \&$$

$$y = \frac{ap^3 - apq^2 - 2apq^2 - aq^3}{p+q} = \frac{ap^3 - 3apq^2 - aq^3}{p+q};$$

& en substituant dans la premiere Equation pour  $x$  &  $y$  leurs valeurs, il vient

$$f = \frac{ap^4 + 3ap^3q - 4ap^2q^2 + ap^3q - 3apq^3 - aq^4}{p+q}$$

$$= \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4ap^2q^2 - aq^4}{p+q} \text{ qui est le fort}$$

cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en quatre parties.

Si l'on suppose maintenant que l'on joue en fix parties, en employant autant d'inconnues que l'on en a besoin, on aura toutes les E-

quations suivantes,  $f = \frac{1.0. \quad 0.1.}{p \times x + q \times y} = \frac{p \times x + q \times y}{p+q}$

$x = \frac{2.0. \quad 1.1.}{p \times z + q \times \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4ap^2q^2 - aq^4}{p+q}} = \frac{ap^4 + 4ap^3q - 4ap^2q^2 - aq^4}{p+q}$

$z = \frac{3.0. \quad 2.1.}{p \times r + q \times z}, r = \frac{4.0. \quad 3.1.}{p \times s + q \times s} = \frac{p \times s + q \times s}{p+q}$

$u = \frac{4.1. \quad 3.2.}{p \times a + q \times m}, m = \frac{4.2. \quad 3.3.}{p \times a + q \times a} = \frac{ap}{p+q}$

Donc  $u = \frac{ap}{p+q} + \frac{apq}{p+q} = \frac{app + 2apq}{p+q}$

$$r = \frac{ap}{p+q} + \frac{app+2apq}{p+q} = \frac{ap^2+3apq+2apq}{p+q}$$

Pour déterminer  $s$ , on a

$$s = \frac{p \times \frac{app+2apq}{p+q} + q \times \frac{app-2apq}{p+q}}{p+q}$$

$$= \frac{ap^3+3apq-2ap^3}{p+q} \quad \text{Donc}$$

$$z = \frac{ap^4+4ap^3q+6ap^2q^2-2q^4}{p+q}$$

fin on a  $x = \frac{ap^5+5ap^4q+10ap^3q^2-5ap^2q^3-2q^5}{p+q}$

Pour déterminer  $y$ , on a ces autres Equations

$$y = \frac{p \times \frac{ap^4+4ap^3q-4ap^2q^2-2q^4}{p+q} + q \times \frac{ap^3-2ap^2q}{p+q}}{p+q}$$

$$k = \frac{p \times f + q \times b}{p+q}, \quad f = \frac{p \times \frac{app-2apq}{p+q} + q \times c}{p+q}$$

$$e = \frac{p \times d + q \times k}{p+q}, \quad d = \frac{p \times c + q \times a}{p+q}$$

$$= \frac{qa}{p+q} \quad \text{Donc } e = -\frac{pqa}{p+q} - \frac{qa}{p+q}$$



66 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

$$= -\frac{2apq - aq^2}{p+q}, \text{ donc } f = \frac{ap^3 - 3apq^2 - aq^3}{p+q};$$

$$\text{on a aussi } b = \frac{p \times \frac{2apq - aq^2}{p+q} + q \times a}{p+q}$$

$$= -\frac{3apq^2 - 3apq^2 - aq^3}{p+q}, \text{ donc}$$

$$k = \frac{ap^4 - 6apq^2q - 4apq^3 - aq^4}{p+q}, \text{ \& enfin}$$

$$y = \frac{ap^5 + 5ap^4q - 10apq^2q^2 - 5apq^4 - aq^5}{p+q}.$$

Et en substituant dans la premiere Equation, pour  $x$  &  $y$ , les valeurs trouvées, il vient

$$f = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4q^2 - 15apq^2q^3 - 6apq^4 - aq^6}{p+q}$$

pour le sort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en six parties.

Soit supposé maintenant que l'on joue en huit parties, & que  $A$  représente le sort de Pierre, lorsque l'on joue en deux parties,  $B$  lorsque l'on joue en quatre parties,  $C$  lorsque l'on joue en six parties.

Si l'on employé autant d'inconnues que l'on en a besoin, on aura toutes les Equations

$$\text{suivantes, } f = \frac{p \times x + q \times y}{p+q}, \quad x = \frac{p \times x + q \times y}{p+q},$$

$$q = \frac{p \times a + q \times r}{p+q}, r = \frac{p \times a + q \times m}{p+q},$$

$$m = \frac{p \times a + q \times k}{p+q}, k = \frac{p \times a + q \times l}{p+q}, l = \frac{p \times a + q \times n}{p+q}$$

$$= \frac{ap}{p+q}. \text{ Donc } k = \frac{app + 2apq}{p+q}, m = \frac{ap^2 + 3app + 3apq^2}{p+q}$$

$$\& r = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appq^2 + 4apq^3}{p+q}$$

$$p \times \frac{ap^3 + 3app + 3apq^2}{p+q} + q \times b$$

$$\text{On trouvera aussi } n = \frac{p+q}{p-q}$$

$$p \times \frac{app + 2apq}{p+q} + q \times a$$

$$b = \frac{p+q}{p+q} = \frac{ap^3 + 3appq + aq^3}{p+q}$$

$$\text{Donc } n = \frac{ap^4 + 4ap^3q + 6appq^2 + aq^4}{p+q}; \&$$

en substituant pour  $r$  &  $n$  les valeurs que l'on vient de trouver, il vient

$$s = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 10ap^5q^2 + 10appq^3 + 7apq^4 + aq^7}{p+q}$$

Pour trouver la valeur de  $s$ , on a

D 2

t =

$$\begin{aligned}
 & p \times \frac{p^3 + 4ap^2q + 6a^2pqq + a^3q^3}{p+q} + 7 \times \frac{a^2q^2}{p+q} \\
 & = \frac{p^4 + 4ap^3q + 6a^2p^2q^2 + 4a^3pq^3 + a^4q^4}{p+q} \\
 & = \frac{p^5 + 5ap^4q + 10a^2p^3q^2 + 10a^3p^2q^3 + 5a^4pq^4 + a^5q^5}{p+q} \text{ . Donc } \\
 & = \frac{ap^6 + 6ap^5q + 15a^2p^4q^2 + 20a^3p^3q^3 + 15a^4p^2q^4 + a^5q^5}{p+q} \text{ , \& enfin } \\
 & = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21a^2p^5q^2 + 35a^3p^4q^3 + 35a^4p^3q^4 + 7a^5p^2q^5 + a^6q^6}{p+q} \text{ . }
 \end{aligned}$$

Pour déterminer  $y$ , on a toutes ces Equa-

$$\text{tions } y = \frac{p \times C + q \times g}{p+q} \text{ , } g = \frac{p \times f + q \times e}{p+q} \text{ , }$$

$$f = \frac{p \times B + q \times d}{p+q} \text{ , } d = \frac{p \times c + q \times b}{p+q} \text{ , } c = \frac{p \times A + q \times T}{p+q} \text{ , }$$

$$T = \frac{p \times X + q \times -a}{p+q} \text{ , } X = \frac{p \times e + q \times -a}{p+q}$$

$$= - \frac{aq}{p+q} \text{ . Donc } T = - \frac{2apq - aq^2}{p+q} \text{ , \& }$$

$$e = \frac{ap^3 - 3apq^2 - aq^3}{p+q} \text{ . Pour trouver la va- }$$

$$\text{leur de } b \text{ , on a } b = \frac{p \times Z + q \times -a}{p+q} \text{ , }$$

$$Z = \frac{p \times \frac{3.4}{p+q} - \frac{aq}{p+q} + \frac{2.5}{q} - a}{p+q} = \frac{2apq - aq^2}{p+q},$$

donc  $b = -\frac{2apq - 2apq^2 - aq^3}{p+q}$  ; ainsi

en substituant les valeurs de  $b$  &  $c$ , il vient

$$d = \frac{ap^4 - 6ap^2q - 4apq^2 - aq^4}{p+q}, \text{ donc}$$

$$f = \frac{ap^5 + 5ap^3q - 10apq^2 - 5apq^3 - aq^5}{p+q}.$$

Pour trouver la valeur de  $e$ , on a

$$e = \frac{p \times \frac{1.3}{p+q} - \frac{ap^2 - 6apq - 4ap^2 - aq^4}{p+q} + \frac{0.4}{q} - V}{p+q},$$

$$V = \frac{p \times \frac{1.4}{p+q} - \frac{2apq - 2apq^2 - aq^3}{p+q} + \frac{0.5}{q} - a}{p+q}$$

$$= -\frac{4ap^2q - 6ap^2q^2 - 4apq^3 - aq^4}{p+q}, \text{ donc}$$

$$e = \frac{ap^6 - 10ap^3q - 10apq^2 - 5apq^3 - aq^5}{p+q}.$$

Maintenant si l'on substitue pour  $f$  &  $e$  les valeurs trouvées, on aura

$$g = \frac{ap^6 + 6ap^3q - 20ap^2q^2 - 15apq^3 - 6apq^4 - aq^6}{p+q}.$$

$D_3$

Donc

Donc enfin  $y = \frac{ap^7 + 7ap^6q + 21ap^5q^2 + 35ap^4q^3 + 35ap^3q^4 + 21ap^2q^5 + 7apq^6 + aq^7}{p+q}$ ;

Et en substituant, dans la premiere Equation, pour  $x$  &  $y$  les valeurs trouvées,

il vient  $\int = \frac{ap^8 + 8ap^7q + 28ap^6q^2 + 56ap^5q^3 + 56ap^4q^4 + 28ap^3q^5 + 8ap^2q^6 + aq^8}{p+q}$ ;

qui est le sort cherché de Pierre, ou son avantage, lorsque l'on joue en huit parties.

On pourroit, par la même voye, déterminer le sort de Pierre, lorsque l'on joue dix parties, & ensuite lorsque l'on en joue un plus grand nombre; mais le nombre des Equations, qu'il faudroit parcourir pour résoudre ces autres cas, devenant fort considerable, il est plus simple, pour les résoudre, d'examiner les grandeurs qui ont été trouvées pour les cas précédens, de les comparer entre elles, & de découvrir par cette comparaison la loi selon laquelle elles croissent. Les grandeurs, qui ont été trouvées, sont

$\frac{ap^2 - aq^2}{p+q}$ , pour 2 parties.

$$\frac{ap^4 + 4ap^3q - 4ap^2q^2 + aq^4}{p+q}, \text{ pour 4 parties.}$$

$$\frac{ap^5 + 5ap^4q + 10ap^3q^2 - 10ap^2q^3 - 5apq^4 + aq^5}{p+q}, \text{ pour 6 parties.}$$

$$\frac{ap^6 + 6ap^5q + 15ap^4q^2 + 10ap^3q^3 - 15ap^2q^4 - 6apq^5 + aq^6}{p+q}, \text{ pour 8 parties.}$$

qui se réduisent, en divisant les numérateurs & les dénominateurs par  $p+q$ ,

$$\frac{ap - aq}{p+q}, \text{ pour 2 parties.}$$

$$\frac{ap^2 + 3apq - 3apq - aq^2}{p+q}, \text{ pour 4 parties.}$$

$$\frac{ap^3 + 3ap^2q + 3ap^2q - 3apq^2 - aq^3}{p+q}, \text{ pour 6 parties.}$$

$$2 \quad \frac{q^7 + 7ap^6q + 21ap^5q^2 + 35a^2p^4q^3 - 35ap^6q^4 - 21ap^5q^5 - 7ap^6q^6 - a^7}{p+q}, \text{ pour 8 parties. } 23$$

$$2 \quad \frac{q^6 + 6ap^5q + 15a^2p^4q^2 + 12ap^6q^4 - 12ap^5q^5 - 6ap^6q^6 - a^6}{p+q}, \text{ pour 10 parties.}$$

$$2 \quad a \times \left\{ \frac{p^{11} + 11p^{10}q + 55p^9q^2 + 165p^8q^3 + 330p^7q^4 + 462p^6q^5 - 462p^5q^6}{p+q} \right\}$$

On aura donc pour 24 parties, ou douze Rois,

pour 12 parties.

$$2 \quad a \times \left\{ \frac{p^{23} + 23p^{22}q + 253p^{21}q^2 + 1771p^{20}q^3 + 8855p^{19}q^4 + 35649p^{18}q^5 + 100947p^{17}q^6 + 245157p^{16}q^7 + 490114p^{15}q^8 + 817190p^{14}q^9 + 1144066p^{13}q^{10} + 1352078p^{12}q^{11} - 1352078p^{11}q^{12} - 1144066p^{10}q^{13} - 817190p^9q^{14} - 490114p^8q^{15} - 245157p^7q^{16} - 100947p^6q^{17} - 35649p^5q^{18} - 8855p^4q^{19} - 1771p^3q^{20} - 253p^2q^{21} - 23p^3q^{22} - q^{23}}{p+q} \right\}$$

Si  $p=5$  &  $q=4$ ,

On aura  $a \times \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9} a$  pour 2 parties.

$$a \times \frac{45-34}{729} = \frac{11a}{729} \text{ pour 4 parties.}$$

$$a \times \frac{35625-2344}{59049} = \frac{33281a}{59049} \text{ pour 6 parties.}$$

$$a \times \frac{2965625-1817844}{4782969} = \frac{214281a}{4782969} \text{ pour 8 parties.}$$

$$a \times \frac{24239615-14160484}{83964489} = \frac{10079171a}{83964489} \text{ pour 10 parties.}$$

$$a \times \frac{201426565-11065793914}{3181059609} = \frac{984747161a}{3181059609} \text{ pour 12 parties.}$$

Et  $a \times \frac{617671821635009765635}{3860381196535010093929}$ , ou environ  $a \times \frac{1}{177}$  pour 24 parties.

Cette dernière grandeur est entre  $\frac{1}{a}$  &  $\frac{1}{2a}$ . Ainsi dans la supposition, que les forces qu habiletés des Joueurs soient comme  $5$  à  $4$ , l'avantage qu'a le joueur le plus fort sur le plus foible n'est que la neuvieme partie de ce qui est :



au Jeu, lorsqu'ils jouent en deux parties; & cet avantage devient un peu plus des deux tiers de ce qui est au Jeu, lorsqu'ils jouent en vingt-quatre parties. Lors donc que dans cette supposition deux Joueurs jouent au Picquet, & mettent au Jeu chacun neuf Louis pour ce que l'on appelle la queue des paris, le Joueur le plus foible fait présent à l'autre de 6 Louis 13 liv. 0 s. 2 den. des neuf Louis qu'il a mis au Jeu.

## REMARQUE I.

Les grandeurs qui ont été trouvées dans les cas que l'on vient d'examiner, & qui expriment l'avantage du Joueur le plus fort; ces grandeurs, dis-je, étant composées de termes positifs & de termes négatifs, il est clair que la somme de tous les positifs exprimera le sort du Joueur le plus fort, ou son droit à la partie, & que la somme de tous les négatifs exprimera le sort du plus foible, ou le droit qu'il a à cette partie; car l'avantage n'est autre chose que l'excès du sort de l'un sur le sort de l'autre.

Ainsi, pour deux parties,

Le sort de l'un sera  $\frac{p}{p+q} \times a$ . Et le sort de

l'autre sera  $\frac{q}{p+q} \times a$ .

Pour quatre parties

$$\frac{p^3 + 3ppq}{p^3 + q^3} \times a \quad \text{Et} \quad \frac{3pqq + q^3}{p^3 + q^3} \times a.$$

Pour

Pour six parties

$$\frac{p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2}{p+q} \times a. \quad \text{Et} \quad \frac{10ppq^2 + 5p^2q^3 + q^5}{p+q} \times a.$$

Pour huit parties

$$\frac{p^7 + 7p^6q + 21p^5q^2 + 35p^4q^3}{p+q} \times a.$$

$$\text{Et} \quad \frac{35p^3q^4 + 21p^2q^5 + 7pq^6 + q^7}{p+q} \times a.$$

Pour dix parties

$$\frac{p^9 + 9p^8q + 36p^7q^2 + 84p^6q^3 + 126p^5q^4}{p+q} \times a.$$

$$\text{Et} \quad \frac{126p^4q^5 + 84p^3q^6 + 36p^2q^7 + 9pq^8 + q^9}{p+q} \times a.$$

D'où l'on voit que pour avoir le fort de chacun des deux joueurs, lorsqu'ils jouent un nombre quelconque de parties, il faut élever le binome  $p+q$  à une puissance dont l'exposant soit moindre d'une unité que le nombre de parties que l'on doit jouer, diviser en deux parties ce binome ainsi élevé, dont la première sera composée de tous les premiers termes jusqu'au milieu, & la seconde, de tous les derniers termes pris depuis le milieu. Chacune de ces parties étant le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est la puissance entière, exprimera le fort de chacun des joueurs, & l'excès de

l'une de ces fractions sur l'autre expriment  
l'avantage du Joueur le plus fort.

### REMARQUE II.

Si l'on avoit cherché par une voye semblable à celle que l'on a suivie ici, le sort des Joueurs & l'avantage de l'un sur l'autre, lorsqu'ils jouent en un nombre impair de parties, on auroit trouvé les mêmes formules que l'on a trouvées, en supposant ce nombre de parties exprimé par le nombre pair qui le suit; ensorte que le sort est le même, soit que l'on joue en une ou deux parties; il est encore le même, soit que l'on joue en trois ou quatre parties, cinq ou six parties, & ainsi des autres.

Ceci peut faire difficulté à la premiere vue; car il est visible que le Joueur le plus fort a d'autant plus d'avantage que l'on joue en un plus grand nombre de parties; ainsi par cette consideration il doit avoir plus d'avantage, lorsque l'on joue en six parties, que lorsque l'on joue en cinq parties. Mais cet avantage est diminué dans le cas de six parties, en ce que ce Joueur, pour gagner, doit gagner deux parties plus que l'autre, car en ce cas, pour gagner, il faut qu'il prenne quatre parties, & l'autre deux; au lieu que dans le cas de cinq parties, il suffit qu'il prenne une partie plus que l'autre, c'est-à-dire, trois parties, & l'autre deux: ainsi, par cette seconde consideration, l'avantage du Joueur le plus fort doit être diminué, car il est évident qu'il est plus difficile de gagner deux parties plus

plus que l'autre, qu'il ne l'est d'en gagner seulement une de plus. Cette réflexion suffit pour faire voir la possibilité de ce que donne le calcul, car le même raisonnement aura lieu pour tout nombre pair de parties comparé au nombre impair qui le précède.

COROLLAIRE I.

Si l'on suppose  $p = q$ , & que l'on substitue dans la Table qui exprime l'avantage du Joueur le plus fort, pour  $q$ , sa valeur  $p$ , on verra que cet avantage devient nul dans tous les cas, c'est-à-dire, quel que soit le nombre de parties que l'on joue. Et si l'on substitue  $p$  à la place de  $q$ , dans la Table qui exprime le sort des deux Joueurs, on trouvera pour le sort de chaque Joueur, quel que soit le nombre de parties que l'on joue; & c'est aussi ce qui doit arriver.

COROLLAIRE II.

Si avant la fin des parties que l'on est convenu de jouer, on étoit obligé de quitter le jeu, & que l'on voulût découvrir de quelle manière il faut partager l'argent du jeu relativement à l'état où est la partie, lorsque l'on cesse de jouer: on trouvera de quelle manière il faut faire ce partage, & quel est l'avantage ou le désavantage des Joueurs, en examinant entre toutes les Equations que l'on a été obligé de parcourir, quelle est celle qui renferme le cas proposé; & cette Equation donnera ce qu'on cherche.

# 73 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

Si l'on demande, par exemple, quel est l'avantage de Pierre, qui est le Joueur le plus fort; lorsque l'état de la partie est telle, que jouant en huit parties, ce Joueur en a quatre, & l'autre deux, l'Equation de ce cas a

$$\text{été trouvée } k = \frac{2pp + 2pq}{p+q} \text{ pour l'avantage}$$

de Pierre, qui dans la supposition de  $p=5$  &  $q=4$ , donne  $\frac{44}{9}$  a pour cet avantage; d'où il suit que ce qui appartient à l'un des Joueurs est  $\frac{22}{9}$  a, & ce qui appartient à l'autre est  $\frac{8}{9}$  a, c'est-à-dire, qu'il faut que Paul donne à Pierre  $\frac{44}{9}$  a.

Si l'état de la partie est tel, que Pierre a deux points, & Paul quatre, lorsque l'on joue en huit points, l'Equation de ce cas est

$$r = - \frac{2pq - 2q^2}{p+q}, \text{ qui est l'avantage de Pier-}$$

re; mais comme cette grandeur est négative, elle exprime ce que Pierre doit payer à Paul, ou l'avantage de Paul, qui dans la supposition de  $p=5$  &  $q=4$ , est  $-\frac{14}{9}$  a; c'est-à-dire, que Pierre doit payer à Paul  $\frac{14}{9}$  a, & les sorts seront comme  $\frac{4}{9}$  à  $\frac{14}{9}$ . Il en sera ainsi des autres que l'on voudra imaginer.

DE LA MECHANIQUE

*avec laquelle diverses Especes de Chenilles, & d'autres Insectes, plient & roulent des feuilles de Plantes & d'Arbres, & sur-tout celles du Chêne.*

Par M. DE REAUMUR. \*

**I**L ne faut point avoir fait une étude particulière de l'Histoire naturelle, pour avoir vu dans des Jardins, dans des Bois, certaines feuilles simplement courbées, d'autres pliées en deux, d'autres roulées plusieurs fois sur elles-mêmes, d'autres ramassées en un paquet informe; & pour avoir remarqué que ces feuilles sont tenues, dans ces differens états, par un grand nombre de fils. Nos Poiriers, nos Pommiers, nos Groseillers, & bien d'autres Arbres & d'autres Plantes, mettent chaque jour sous les yeux de ces sortes de feuilles. On a pu encore observer que le milieu de ces feuilles est souvent occupé par un Insecte, & ordinairement par une Chenille. Le Chêne, le meilleur de tous les Arbres pour nos usages, est aussi le plus amusant pour un Naturaliste; M. Valisnieri assure qu'il nourrit seul plus de deux cens différentes especes d'Insectes; je n'ai pas compté celles que j'y ai observées, mais je ne crois pas

pas qu'elles aillent loin de ce nombre. Il est aussi de tous les Arbres celui où l'on voit plus de feuilles pliées & roulées: on y en apperçoit qui le sont avec une régularité qui donne envie de savoir comment des Insectes peuvent venir à bout de les contourner de la sorte; ces Insectes sont des Chenilles. J'ai cherché à découvrir la mécanique à laquelle elles ont recours pour faire si bien prendre la forme de Rouleaux, ou de Cornets, à des feuilles. Je vais expliquer celle qu'elles m'ont laissé voir, & ce sera, je crois, avoir expliqué celle dont se servent quantité d'autres Insectes qui font des ouvrages du même genre, mais moins parfaits.

Si l'on considère les feuilles des Chênes, vers le milieu du Printems, lorsqu'elles se sont entièrement développées & étendues, on en apperçoit plusieurs roulées de différentes manières, toutes capables de leur attirer de l'attention. La partie supérieure du bout des unes paroît avoir été ramenée vers le dessous de la feuille, pour y décrire le premier tour d'une Spirale, qui a été ensuite recouvert de plusieurs autres tours, fournis par des roulemens successifs, & poussés quelquefois jusqu'au milieu de la feuille, & quelquefois par-delà \*. Nos doigts ne pourroient mieux faire pour rouler régulièrement une feuille, que ce qu'on voit ici; les Oublies ne font pas mieux roulées. Le centre du rouleau est vuide: c'est un tuyau creux, dont le diamètre est proportionné à celui du corps d'une Chenille, qui l'habite, & qui l'a fait pour l'habiter. D'autres feuilles  
des

des mêmes Arbres (mais le nombre de celles-ci est plus petit) sont roulées vers le dessus, comme les premières le sont vers le dessous. D'autres, en grand nombre, sont roulées vers le dessous de la feuille comme les premières, mais dans des directions totalement différentes. La longueur ou l'axe des premiers rouleaux est perpendiculaire à la principale nervûre & à la queue de la feuille, la longueur de ceux-ci est parallèle à la même nervûre \*. Le roulement de celles-ci n'est quelquefois poussé que jusqu'à la principale nervûre, & quelquefois la largeur entière de la feuille est roulée †. Les axes, ou longueurs de divers autres rouleaux sont obliques à la principale nervûre, leurs obliquités varient sous une infinité d'angles, de façon néanmoins que l'axe du rouleau prolongé rencontre ordinairement la grosse nervûre du côté du bout de la feuille ‡. Quoique la surface des rouleaux soit quelquefois très unie, & telle que la donne celle d'une feuille assez lisse, il y en a pourtant qui ont des inégalités, des enfoncemens, tels que les donneroit une feuille chiffonnée.

De pareils ouvrages ne seroient pas bien difficiles à faire à qui a des doigts, mais les Chenilles n'ont ni doigts ni parties qui semblent équivalentes. D'ailleurs, d'avoir roulé les feuilles, c'est avoir fait au plus la moitié de la besogne, il faut les contenir dans un état d'où leur ressort naturel tend continuellement à les tirer. La mécanique à laquelle elles

\* Fig. 2. † Fig. 1. ‡ Fig. 10.



## 82 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

elles ont recours pour cette seconde partie de l'ouvrage, est aisée à observer. On voit des paquets de fils, attachés par un bout à la surface extérieure du rouleau, & par l'autre au plat de la feuille.\*; ce sont autant de liens, autant de petites cordes qui tiennent contre le ressort de la feuille. Il y a quelquefois plus de dix à douze de ces liens rangés à peu près sur une même ligne, lorsque le dernier tour d'un rouleau a à peu près la longueur, ou seulement la largeur entière de la feuille. Toutes ou presque toutes les Chenilles savent filer; chaque lien est un paquet de fils de soye blanche, pressés les uns auprès des autres, mais qu'on juge pourtant tous séparés.

On imagine assez que ces petits cordages sont suffisans pour conserver à la feuille la forme de rouleau : mais il ne m'a pas paru aussi aisé d'imaginer comment la Chenille lui donnoit cette forme; comment, & dans quel tems elle attachoit les liens. Tout cela m'a semblé dépendre de bien de petites manœuvres que j'ai eu très envie de savoir, & qu'on ne pouvoit apprendre qu'en les voyant pratiquer par l'Insecte même. Il n'y avoit gueres apparence d'y parvenir en observant les Chenilles sur les Chênes qu'elles habitent; le moment où elles travaillent n'est pas facile à saisir, & la présence d'un Spectateur ne les excite pas au travail. J'ai tenté un moyen qui m'a réussi mieux que je ne l'esperois. J'ai picqué dans un grand Vase, plein de terre hu-

\* Fig. 1. & 2. 10; 11, &c.

humide, des branches de Chêne fraîchement cassées; j'ai distribué sur leurs feuilles quantité de Chenilles que j'avois tirées des rouleaux qu'elles s'étoient déjà faits. Par bonheur, elles souffrent impatiemment d'être à découvert; savent-elles qu'elles courent alors risque de devenir la pâture des Oiseaux? ou si elles sentent qu'elles ont besoin d'être à l'abri des impressions du grand air? Quoi qu'il en soit, elles se sont mises à travailler dans mon Cabinet & sous mes yeux, comme elles l'eussent fait en plein Bois.

Ordinairement, c'est le dessus de la feuille qu'elles roulent vers le dessous; mais les unes commencent le rouleau par le bout même de la feuille, & les autres par une des dentelures des côtés. Les rouleaux commencés de la première façon, se trouvent perpendiculaires à la principale nervûre, & ceux qui sont commencés de la seconde, lui sont ou parallèles ou inclinés. Quelque platte que paroisse une feuille, lors même que sa surface supérieure est concave, il est rare que le bord, ou quelque endroit du bord d'une de ses dentelures, ne soit point un peu recourbé en dessous; & quelque petite que soit l'étendue de la partie recourbée, & quelque petite que soit sa courbure, c'en est assez pour donner prise à la Chenille, pour la mettre en état de commencer à contourner la feuille, & de la contourner ensuite autant qu'il lui plaira. Des fils pareils à ceux qui maintiennent la feuille dans la figure de rouleau, servent à la lui faire prendre. Ce n'est qu'en la tirant successivement en différens endroits avec de  
pe-

## 84 MEMOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

petites cordes, qu'elle vient à bout de la plier en une espece de spirale, qui a quelquefois cinq à six tours qui tournent autour du même centre.

Notre Insecte ayant donc choisi un endroit où le bord de la feuille est tant soit peu recourbé en dessous, elle s'y établit, & commence à travailler \*. Alors sa tête se donne des mouvemens alternatifs très prompts; elle décrit alternativement des especes d'arcs en sens opposés, comme le font ceux des vibrations d'un Pendule. Le milieu de son corps, ou quelque endroit plus proche de la queue, est l'espece de centre sur lequel la tête, & la partie du corps à qui elle tient, se meuvent. La tête va s'appliquer contre le dessous de la feuille, tout près du bord; & de là elle va s'appliquer le plus loin qu'elle peut aller, du côté de la principale nervûre †; elle retourne sur le champ d'où elle étoit partie la première fois, & revient de même ensuite retoucher une seconde fois l'endroit le plus éloigné du bord. Ainsi continue-t-elle à se donner de suite plus de deux à trois cens mouvemens alternatifs, c'est-à-dire, à filer autant de fils, car chaque mouvement de tête, chaque allée & chaque retour produit un fil, que la Chenille attache par chaque bout aux endroits où sa tête paroît s'appliquer. Chacun de ces fils est tendu depuis la partie recourbée de la feuille jusqu'à sa partie plane; il sert, ou doit servir, à tirer la première vers la seconde: tous ces fils ensemble doi-

\* Fig. 4. † Fig. 5. & 6.

doivent faire une espece de lien. Ils ne partent pas tous d'un même point, les surfaces sur lesquelles ils sont appliqués, soit du côté du bord de la feuille, soit du côté opposé, approchent quelquefois de la circulaire, & ont plus d'une ligne de diametre \*. La Chenille même n'en colle pas un grand nombre en dessous, près du bord de la feuille. Bientôt elle en colle quelques-uns contre le bord même, & ceux qu'elle file peu après, elle les attache à la surface supérieure, à la vérité à une petite distance du bord †. Ce premier paquet de fils donne déjà une augmentation de courbure à la feuille vers le dessous. Une partie sensible paroît se replier; la partie même du bord, à laquelle le paquet de fils est attaché, est plus recourbée que celles qui la suivent, qui tendent à se redresser; mais bientôt une plus longue portion va se replier. Le premier lien ayant été assez fourni de fils, la Chenille va en commencer un autre à deux ou trois lignes de distance du précédent. Pour former celui-ci, elle fait une manœuvre précisément pareille à celle qu'elle a employée pour le premier. Il a aussi un effet pareil; la partie qui est entre le premier lien & le second, se recourbe plus qu'elle n'étoit, & ce qui est par-delà le nouveau lien commence à se recourber, & se recourbera davantage, lorsque la Chenille aura filé plus loin un troisième lien pareil aux précédens.

L'étendue de la partie qui doit former le pre-

\* Fig. 6. & 9.

† Fig. 7.

premier tour du rouleau n'est pas grande : il en est ici comme d'un papier qu'on roule, en commençant à le rouler près d'un de ses angles ; aussi trois à quatre paquets de fils suffisent pour donner la courbure à tout ce premier tour.

C'est encore au moyen de pareils fils, de pareils liens, que le second tour doit être tortillé \*. Il faut tirer vers le dessous de la feuille une portion de la surface supérieure suffisamment distante de celle qui a été roulée, c'est-à-dire, qu'il faut que chaque nouveau lien soit attaché par un bout à une partie de la feuille plus éloignée du bord, & que par l'autre bout il soit attaché plus près de la principale nervûre, ou de la queue de la feuille. En un mot, des paquets de fils arrangés au dessus de ceux du premier tour, comme ceux du premier l'ont été, doivent produire un effet semblable ; comme les premiers ont fait faire à la feuille un premier ou à peu près un premier tour de spirale, de même les autres lui en feront faire un second, ou à peu près, & ainsi de tours en tours.

L'effet néanmoins de ces paquets de fils, leur entier usage, n'est pas encore assez clair, à beaucoup près : on voit bien, comme nous l'avons vu d'abord, qu'ils servent à tenir la feuille roulée ; mais quoique je visse la feuille se courber de plus en plus, à mesure qu'un nouveau lien se finissoit, j'avoue que je n'apercevois pas la cause du roulement. Le paquet n'est que l'assemblage de fils filés suc-

ces-

cessivement. Dans l'instant, que chaque fil vient de fortir de la filiere, pendant qu'il est mol encore, l'Insecte l'applique contre la feuille, il est assez gluant pour s'y coller. Il peut bien avoir été tiré droit d'une partie de la feuille à l'autre, mais il ne sauroit avoir été assez tendu pour faire un effort capable de ramener les deux parties de la feuille l'une contre l'autre. Je sai que ce fil, quoiqu'extrêmement délié, a quelque force; je l'ai vu en bien des circonstances suspendre la Chenille en l'air: mais il n'a pas été possible, que quand il a été attaché mol, qu'il ait été attaché avec le degré de tension nécessaire pour forcer une des parties d'une feuille à s'approcher de l'autre. Si après avoir été filé, il se raccourcissoit en sechant, ce raccourcissement le mettroit en état d'agir: mais où peut aller le raccourcissement d'un fil si court? combien donneroit-il peu de courbure à la feuille?

Une force plus puissante agit aussi contre elle; c'est une grande partie du poids de la Chenille: & ce n'a été qu'après avoir vu cet Insecte faire souvent de pareil ouvrage, que j'ai apperçu tout l'artifice de sa mécanique. Il dépend de la structure de chaque paquet de fils, de chaque lien. Nous l'avons considéré d'abord comme formé de fils à peu près parallèles; mais à présent, pour nous en faire une idée plus exacte, nous devons le regarder comme composé de deux plans de fils posés l'un au dessus de l'autre\*. Tous les fils

## 88 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

du plan supérieur croissent ceux du plan inférieur. La manœuvre de l'Insecte m'en a convaincu; les fils eux-mêmes observés à la Loupe devoient me le faire voir; enfin un paquet considéré à la vue simple, suffisoit pour découvrir cette structure qui m'avoit échappé: il est plus large à l'une & à l'autre des extrémités, qu'il ne l'est au milieu; le nombre des fils du milieu est pourtant égal à celui des fils des bouts. Pourquoi y occupent-ils moins de place? c'est qu'ils y sont plus ferrés les uns contre les autres, c'est qu'ils s'y croisent. Regardons donc chaque lien comme composé de deux plans de fils qui se croisent, suivons la Chenille pendant qu'elle file ceux de chacun de ces plans, & nous découvrirons le double usage de ces deux plans, de ces deux especes de toile. Les fils du premier plan étant tous attachés à peu près parallèlement les uns aux autres, comme on le voit en  $AB$  \*, la Chenille passe de l'autre côté pour filer ceux du second plan  $CD$  †. Pendant qu'elle file, elle ne peut aller de  $C$  en  $D$  sans passer sur les fils  $AB$ , & loin de chercher à les éviter en soutenant son corps & sa tête plus haut, on voit sa tête & une partie de son corps toujours appliqués sur le plan  $AB$ , elle ne l'abandonne point, elle le presse. Ces fils ensemble font une espece de toile, ou de chaine de toile, capable de soutenir cette pression; ils tirent par conséquent les deux parties de la feuille l'une vers l'autre. Celle qui est près du bord

cede,

\* Fig. 11.

† Fi

cede, se rapproche de l'autre; la feuille se courbe. Il n'est plus question que de lui conserver la courbure qu'elle vient de prendre, & c'est à quoi sert le nouveau fil que la Chenille attache. Ces fils, comme je l'ai déjà fait remarquer, sont capables de soutenir un effort aussi considerable que celui que la feuille fait contre eux, puisqu'ils peuvent soutenir une Chenille en l'air. Il suit de ce que nous venons de dire; que les fils de la couche supérieure sont les seuls qui soient tendus, que ceux de la couche inférieure deviennent lâches; c'est aussi ce qu'on peut remarquer en observant le paquet avec attention.

La même mécanique, qui s'observe dans les deux différentes couches d'un même lien, doit se trouver & se voit bien plus aisément dans les liens des différents tours, comparés les uns aux autres. Quand la feuille ne fait encore qu'un tour de spirale, les liens qui retiennent ce tour sont tendus, au moins leur partie supérieure l'est. Mais quand la même feuille a, par son roulement, fait un second tour, ce ne sont plus que les derniers liens qui retiennent ce tour, qui sont tendus, tous ceux qui arrêtoient d'abord le tour précédent sont lâches, ils ne produisent plus aucun effet \*. Si on appuie légèrement sur ceux du second tour avec une plume, on voit que la feuille est tirée par cet effort; mais quoiqu'on appuie davantage sur ceux du premier tour, l'action ne passe pas jusqu'à la feuille: aussi la

\* Fig. 16.



la vue seule apprend qu'ils sont comme floetans. Il n'y a donc que les liens du dernier tour, ou plutôt que la couche supérieure des fils du lien du dernier tour, qui conservent la courbure de la feuille.

Une Chenille qui s'est attaquée à une feuille de Chêne épaisse, dont les nervûres sont grosses, pourroit ne pas filer des fils assez forts pour tenir contre la roideur des principales nervûres, & sur-tout de celle du milieu. Mais elle fait les rendre souples; elle ronge en trois à quatre endroits différens, ce que ces nervûres ont d'épaisseur de plus que le reste de la feuille; les endroits ainsi rongés n'ont qu'une petite étendue. Ils m'ont paru se trouver où la feuille doit être pliée pour recommencer à faire un nouveau tour.

Quand la Chenille, après avoir roulé une portion de la feuille, parvient à un endroit où il y a une dentelure qui débord beaucoup par delà le reste, il arrive que les fils qu'elle attache au bout de cette dentelure, au lieu de la rouler, la plient, elle ne se courbe que vers le commencement du pli, le reste conserve une figure à peu près plane; de plus, si la Chenille donnoit à toute cette partie de la feuille une égale rondeur, comme elle l'a fait aux parties qu'elle a ci-devant roulées, & qui étoient d'une moindre étendue, le vuide du rouleau auroit là beaucoup plus de diametre qu'il n'en a ailleurs, il n'auroit plus les proportions commodes à l'Insecte. Après avoir observé de ces grandes dentelures de feuilles, qu'elles avoient presque pliées à plat, je les ai vu dans la suite

en

en former un Tuyau d'un aussi petit diamètre que l'étoit celui des autres endroits, & un Tuyau très bien arrondi. Pour cela, la Chenille a besoin d'avoir recours à deux manœuvres différentes. 1<sup>o</sup>. Elle raccourcit la partie pliée; elle en retranche, pour ainsi dire, tout ce qu'elle a de trop d'étendue, elle en attache une portion à plat contre la feuille par un millier de fils. 2<sup>o</sup>. Ce qui reste libre est trop applatti, c'est à coups de tête qu'il m'a paru qu'elle l'arrondissoit. J'ai vu des Chenilles renfermées dans ces endroits trop aplattis, qui agitoient leur tête vivement & alternativement en des sens contraires. A chaque mouvement la tête frappoit contre les parois, c'étoient des especes de petits coups de marteau dont on entendoit le bruit.

Au reste, quand la Chenille a fini le premier tour du rouleau, elle travaille presque à moitié à couvert; le bout replié ne touche jamais entierement la partie de la feuille sur laquelle il a été ramené: outre que souvent il n'est pas courbé autant qu'il le faudroit pour cela, c'est que ses bords sont dentelés, & laissent des passages au corps flexible de l'Insecte. La Chenille se sert des mêmes passages pour faire sortir la moitié de son corps ou plus, lorsqu'elle file les liens qui attachent le milieu du troisième ou du quatrième tour. Pour les liens qui sont plus près des bouts, les ouvertures des bouts lui donnent une plus libre sortie. Le bout de la queue reste dans l'intérieur du rouleau, pendant que

la tête va filer aussi loin qu'elle peut atteindre \*, ce qui la mène assez près du milieu du rouleau.

Outre les liens qui font tout du long du dernier tour du rouleau, l'Insecte a souvent besoin d'en mettre aux deux bouts, ou au moins à un des bouts; mais ils sont tellement disposés, qu'ils ne lui ôtent pas la liberté de sortir de l'intérieur de ce rouleau, & d'y rentrer. C'est-là son domicile, c'est une espèce de cellule cylindrique, qui ne reçoit le jour que par les deux bouts; & ce qu'elle a de commode, c'est que ses murs fournissent la nourriture à l'Animal qui l'habite. Cette Chenille vit de feuilles de Chêne; étant à couvert, elle les ronge à son aise & en sûreté. Elle commence par ronger le bout qui a été le premier contourné, & de suite elle mange tout ce qui a été tortillé, au dernier tour près. Aussi, de quatre à cinq tours que faisoit une feuille tortillée par delà le milieu, ou même entièrement tortillée, souvent on ne retrouve plus que le dernier tour.

Quelquefois j'ai trouvé que le rouleau avoit été formé de deux feuilles roulées selon leur longueur; celle qui devoit occuper le centre, avoit alors été presque entièrement rongée, il n'en restoit que les plus grosses fibres. J'en ai vu qui en faisant leur rouleau, ne laissoient pas de manger; elles dressoient en même tems les endroits qui se feroient malaisément pliés, elles les rongeoient.

Cet

Cette industrieuse & laborieuse Chenille est au plus de celles qui sont d'une grandeur médiocre \*. Elle est d'un gris ardoisé ; quelquefois elle paroît pourtant d'un brun verdâtre, mais je crois que c'est quand elle est bien foulée de feuilles. Peut-être aussi que sa couleur paroît différente après des changemens de peau, car elle en change probablement plusieurs fois, les dépouilles qu'on trouve dans les rouleaux le prouvent. Elle est d'une extrême vivacité ; pour peu qu'on la touche, on la voit se remuer en différens sens avec une grande vitesse.

Un des bouts du rouleau est l'ouverture par où elle jette ses excréments, qui sont de petits grains noirs & à peu près ronds.

Une partie d'une feuille, ou même une feuille de Chêne entière, ne seroit pas une provision suffisante pour la nourriture de notre Chenille pendant toute sa vie ; elles se font de nouveaux rouleaux quand elles en ont besoin. Après y avoir vécu en Chenilles, elles s'y métamorphosent en Chrysalides, & ensuite en Papillons. Le dernier rouleau qu'elles se font, diffère un peu des autres, les tours en sont moins serrés, l'Insecte est devenu plus gros. Chaque tour de ce dernier rouleau n'est pas attaché par ces forts liens distribués d'espaces en espaces ; des fils un peu écartés les uns des autres, mais qui relient depuis un bout jusqu'à l'autre, le retiennent † ; c'est une espèce de toile légère dont la force n'est pas équivalente à celle des cor-

da-

\* Fig. 17.

† Fig. 18.

dages employés ci-devant. Il semble que l'Insecte sache proportionner la force qu'il employe, à la résistance qu'il a à vaincre; plus le diametre des tours est petit, & plus le ressort de la feuille agit pour la redresser, aussi est-ce sur-tout le dernier tour qui n'est tenu que par la toile dont nous parlons. Dans la fabrique de cette espece de toile, on observe la même mécanique que nous avons remarquée dans celle des liens; elle est de même composée de deux plans de fils qui se croisent très visiblement; ceux de dessous servent à tirer la feuille, à la courber, pendant que l'Insecte s'appuye dessus, & qu'il file ceux du plan supérieur qui doivent la fixer dans cette courbure.

C'est dans ces mêmes Etuis, où nos Chenilles ont vécu & cru, qu'elles se transforment en Chrysalides \*. La peau des Chrysalides est molle & tendre dans les premiers momens de la transformation, quoique par la suite elle devienne sèche & dure; l'attouchement de la feuille seroit trop rude pour cette peau, lorsqu'elle ne vient que d'être dégagée de dessous l'enveloppe de Chenille. Il semble que l'Insecte ait prévu qu'il avoit à craindre cette incommodité, car lorsque le tems de cette premiere métamorphose approche, il tapisse l'intérieur du rouleau d'une légère couche de fils de soye, dont l'attouchement est plus doux que celui de la surface rude de la feuille.

Enfin, à l'état de Chrysalide doit succeder  
ce-

\* Fig. 19. & 20.

celui de Papillon\*. La condition de cette Chenille, comme celle de toutes les Chenilles que nous connoissons, est de vivre successivement sous ces trois formes différentes. Je ne fais point assez précisément combien elle conserve celle de Chrysalide, mais il ne m'a pas paru que ce fût plus de trois semaines. Quand elle est prête de la quitter, elle avance vers un des bouts du rouleau, jusqu'à en sortir près d'à moitié ou plus †; là, plus exposé à l'air, le fourreau de Chrysalide achevé de se sécher, & les efforts que fait le Papillon qu'il renferme, le brisent plus aisément. Le Papillon s'en échape, & n'a plus besoin, pour prendre l'essor, que de laisser évaporer pendant quelques instans l'humidité de ses ailes. Si on examine dans le mois de Juillet les rouleaux de nos feuilles de Chêne, il y en aura peu à qui on ne trouve un fourreau de Chrysalide qui est resté à un des bouts, & cela parce que les Papillons en sont sortis depuis le mois de Juin.

La couleur de ces Papillons est composée de différentes nuances de brun jaunâtre, les unes plus foncées, les autres plus claires, mêlées par des espèces de taches qui font un agréable effet ‡. Les mêmes Chenilles en donnent de deux grosseurs différentes. Les plus petits, selon l'analogie ordinaire, devroient être les mâles: j'en ai pourtant vu d'accouplés qui ne différoient pas considérablement en grosseur. Pendant leur accouple-

\* Fig. 21. & 22. † Fig. 18. 7.

‡ Fig. 21. & 22.

ment, ils sont placés derrière contre derrière, à la manière des Hannetons.

Au reste, l'espèce de Chenille grise, ou d'un gris verdâtre, dont nous avons parlé jusqu'ici, n'est pas la seule qui roule des feuilles de Plantes & d'Arbres, ni même la seule qui roule des feuilles de Chêne. J'ai observé d'autres espèces, soit beaucoup plus grosses, soit plus petites, qui roulent aussi les feuilles de ce dernier Arbre, & entre celles-ci j'en ai observé d'entièrement vertes, de verdâtres, & de diverses autres couleurs. Il y en a une qui roule fort artistement les feuilles d'Orme, qui ne diffère guère ni par sa grandeur, ni par sa couleur, de notre habile rouleuse. Mais comme toutes ces diverses espèces n'ont point d'artifices différens de celui que nous avons suivi jusqu'ici, que leurs rouleaux ne sont pas toujours aussi bien faits que ceux que nous avons décrits, elles n'ont rien qui doive nous arrêter. En général, presque toutes les rouleuses sont d'une très grande vivacité.

Il nous reste à parler des Chenilles qui, au lieu de rouler les feuilles, se contentent de les plier. Le nombre de ces plieuses est encore plus grand que celui des rouleuses : leurs ouvrages sont plus simples ; mais il y en a qui malgré leur simplicité ne laissent pas de paroître industrieux. Le Chêne nous fournit encore de ceux-ci ; on voit de ses feuilles dont le bout a été ramené vers le dessous \* ; il y a été appliqué & assujetti presque

\* Fig. 23.

que à plat, il ne reste d'élévation sensible qu'à l'endroit du pli. J'ai observé de ces feuilles, où tout le contour de la partie pliée étoit logé dans une espèce de rainure que la Chenille avoit creusée dans plus de la moitié de l'épaisseur de la feuille. Sur d'autres feuilles du même Arbre, on voit que de leurs grandes dentelures ont été de même pliées en dessous. La plupart des autres Arbres nous offrent aussi des feuilles pliées par les Chenilles. Mais il n'y en a point où on puisse en observer plus commodément que sur les Pommiers, ils en ont de toutes espèces à nous faire voir; de seulement pliées en partie, je veux dire de simplement courbées \*; de pliées entièrement, je veux dire, où la partie pliée a été ramenée à plat sur une autre partie de la feuille; de courbées, de pliées vers le dessus, & de courbées ou pliées vers le dessous. Entre ces dernières, le Pommier même en a qui ont une singularité, que je n'ai observée sur aucunes de celles des autres Arbres. Tout autour du bord de la dentelure de la partie repliée, il y a un bourlet comme cotonneux, qui est pourtant de foye d'un jaune pâle †; il s'élève d'environ une ligne au dessus de la partie qu'il entoure; il la borde comme feroit un cordonnet; il a plus d'épaisseur que de largeur.

Au-lieu que les Chenilles rouleuses habitent des rouleaux, les plieuses se tiennent dans une espèce de Boîte plate; elles n'y ont pas un grand espace, mais il est proportionné

\* Fig. 24.

† Fig. 27.

E 5



à la grandeur & à la grosseur de leur corps ; ordinairement elles sont des plus petites. Chacune est bien close dans cette espece d'étui plat, ou de boîte ; il reste pourtant quelquefois une ouverture à chaque bout, mais à peine ces ouvertures sont-elles sensibles \*. Elles se renferment aussi pour se nourrir à couvert ; mais si elles rongeoient , comme font les rouleuses, l'épaisseur entiere de la feuille, leurs especes de boîtes seroient bientôt tout à jour, au-lieu que tant qu'elles y demeurent, jamais on n'y voit de trous. Leur goût, & peut-être leur prévoyance, les porte à ne manger qu'une partie de l'épaisseur de la feuille. Celles qui plient les feuilles en dessous, épargnent la membrane qui en fait le dessus. Les unes & les autres n'attaquent point les nervûres & les fibres un peu grosses. Elles savent ne détacher que la substance la plus molle, la pulpe, le parenchime qui est renfermé dans le rézeau fait par l'entrelassement des fibres. Aussi la structure de ce rézeau est-elle bien plus sensible dans les endroits où elles ont rongé, que dans les autres.

Celles qui habitent des feuilles bien pliées, commencent à ronger la substance de la feuille à un des bouts de l'étui, & la partie qui a été rongée la premiere, est celle sur laquelle elles déposent leurs excréments. Elles continuent à ronger, en avançant vers l'autre bout, mais elles ont la propreté d'aller jeter leurs excréments dans l'endroit où sont les premiers ;  
ainsi

ainsi ils se trouvent accumulés à un coin, & jamais il n'y en a d'épars. C'est au moins ce qu'observent régulièrement les Chenilles de nos Pommiers, dont les étuis sont environnés d'un bourlet ou cordon foyeux. On voit avec plaisir manger celles qui se contentent de courber des feuilles, sur-tout si on les considère à la Loupe. On remarque avec quelle adresse & avec quelle vitesse elles découpent partie de l'épaisseur de la feuille. Leur tête est un peu inclinée vers un côté, afin apparemment qu'une seule de leurs dents perce d'abord une petite portion de la substance de la feuille, que les deux dents, ferrées l'une contre l'autre dans le moment suivant, savent détacher. Les coups de dents se succèdent avec une vitesse prodigieuse, & à mesure qu'ils sont réitérés, le réseau, formé par les fibres, se découvre, devient net, dans les endroits où auparavant il étoit à peine sensible. Ce n'est que par de petites aires que la substance de la feuille est emportée.

Ces Chenilles, qui se contentent de courber les feuilles, sont celles aussi qui sont les plus aisées à observer dans leur travail, il est le plus simple de ceux de ce genre; il suffira pourtant de l'avoir détaillé, pour avoir donné une idée de tous les autres. Une petite Chenille d'un verd clair, dont chaque anneau est chargé de plusieurs petits grains noirs, est sur toutes commode à suivre, elle aime à ronger le dessus de la feuille, & par conséquent elle doit plier la feuille, ou ramener la dentelure de quelque endroit de ses bords, vers le dessus; elle se contente de faire décrire un

arc tantôt plus, tantôt moins courbe, à la partie qu'elle contourne \*, mais jamais elle ne la contourne au point de ramener ses bords à toucher le dessus de la feuille. Elle ne craint point la présence du Spectateur; elle plie la feuille sur sa main, s'il tient sa main en repos. Une de ces Chenilles étant posée sur le dessus d'une feuille platte de Pommier, n'est donc pas longtems sans travailler à donner à une portion de cette feuille la courbure qu'elle lui veut. Entre les differens endroits des bords de la feuille, il y en a toujours qui s'élevent plus que les autres. C'est à un de ceux-là qu'elle s'adresse; elle s'en approche à une distance convenable, & se fixant sur sa queue & sur les anneaux qui en sont proche, elle porte sa tête sur le bord de la feuille, & de-là la ramene sur le plat de la feuille; du côté de la principale nervûre †; elle file de suite plusieurs fils paralleles les uns aux autres, qui font le commencement d'une piece de toile qu'elle va étendre.

Nous avons considéré la feuille comme à peu près platte, mais seulement comme à peu près platte; ainsi les fils qui viennent d'être filés ne sont appliqués contre cette feuille que par leurs bouts, le reste de leur longueur est en l'air. La Chenille monte sur ces fils qui, chargés de son poids, forcent le bord de la feuille à avancer vers la principale nervûre. Les nouveaux fils, que la Chenille file en cette position, maintiennent le bord de la feuille dans le commencement de la cour-

courbure qu'elle a prise; en étendant ensuite cette toile, & marchant dessus à mesure qu'elle l'étend, la Chenille force toujours de plus en plus la feuille à se plier. Cette mécanique est bien simple, & ne mériterait pas de nous arrêter, après avoir vu pratiquer l'équivalent par nos rouleuses; mais le supplément qu'il faut y ajouter ne doit pas être passé sous silence. Les fils qui composent la toile, n'ont qu'une longueur proportionnée aux arcs que la tête de la Chenille peut décrire; étant fixée sur une portion de son corps. Si au moyen de cordes si courtes, & dirigées comme elles le sont, la Chenille forçoit la feuille à se courber entièrement, la feuille ainsi courbée décrirait une circonférence d'un très petit rayon, telles que sont celles des premiers tours de certains rouleaux. Or la courbure qu'elle veut, & qu'elle a besoin de donner à cette partie de la feuille, doit être celle d'un cercle, ou d'une autre courbe d'un plus grand rayon. Pour parvenir à la lui donner, elle ne continue pas à la tirer par des cordes si courtes, ou dont les directions soient si inclinées. Après avoir filé une certaine étendue de toile, elle cesse de suivre la même ligne, elle vient se placer plus près de la grosse nervûre \*, & là elle commence à filer une toile composée de fils; elle colle un des bouts de chacun des nouveaux fils à la toile précédente, & l'autre le plus près qu'elle peut aller de la principale nervûre, ou même par delà. Ce qui fait le même effet

quo

\* Fig. 26.

E 7

que si elle eût augmenté près d'une fois la longueur des premières cordes. Elle monte alors sur ce nouveau plan, & se place vers l'endroit où les deux pièces de toiles ont été réunies. Là placée, elle attache des fils au bord de la feuille, & vers la principale nervûre, elle forme une nouvelle toile; à cette nouvelle toile, elle attache bientôt les fils d'une autre, qui croisent ceux de la précédente, & ainsi de suite elle continue à faire courber la feuille, mais doucement, & sans que sa courbure soit considérable. Des plans de toile s'élèvent ainsi successivement les uns au dessus des autres, & quand la Chenille a avancé son ouvrage, elle paroît, par rapport à la surface de la feuille, comme sur un échaffaud,

Elle ne se tient pourtant pas toujours sur ces plans de toile; de tems en tems elle en descend, & vient sur la surface de la feuille; quelquefois c'est pour s'y reposer en mangeant; quelquefois on l'y voit la tête levée, agiter avec vitesse ses premières jambes; elles lui servent alors de mains pour briser les toiles des plans inférieurs, qui ne peuvent plus que l'incommoder, lorsqu'elle veut marcher sur la feuille, & qui peuvent même s'opposer à l'effet qu'elle a à faire produire aux toiles des plans supérieurs.

Celles-ci, comme je l'ai assez dit, se contentent de courber une portion de la feuille; mais celles qui achevent de la plier, ne commencent pas leur ouvrage autrement; elles commencent par faire prendre de la courbure à la partie qui doit être ramenée à plat, & quand

quand elle en a pris suffisamment, la Chenille passe sous le plan de toile qui la tient courbée, & au dessous de ce plan elle en file d'autres, successivement, qui sont tous de plus proches en plus proches du pli de la partie recourbée. L'effet de ceux-ci dépend de leur position. N'en considérons qu'un, celui qui suit immédiatement l'extérieur. D'un côté les bouts de ses fils ne sont pas attachés à la dentelure, ils le sont un peu au-dessous, & par l'autre bout ils sont attachés à partie de la feuille correspondante. D'où il est clair que quand la Chenille charge ce plan de fils, cette toile, qu'elle approche l'une de l'autre les deux parties de la feuille, qu'elle les approchera encore davantage, & qu'elle les conduira à s'appliquer l'une contre l'autre, en filant une seconde, une troisième couche de fils, s'il en est besoin, dont les bouts des fils se trouvent toujours attachés plus près de l'endroit où doit être le pli.

Les couches de fils, les toiles qui précèdent la dernière filée, ne produisent presque plus d'effet \*. Les fils des premières se trouvent en dehors de la dentelure, & la Chenille y pousse ceux des toiles qui la suivent. De-là il arrive que ces fils lâches, entrelassés, & poussés par delà le bord de la partie pliée, forment une espèce de bourlet, qui semble avoir été fait avec plus d'artifice qu'il ne l'a été †.

Au reste, quelle que soit la position de la feuille, la Chenille fait toujours le même usage.

\* Fig. 28.

† Fig. 27.

usage du poids de son corps pour la courber ou plier. Si une feuille est posée horizontalement, & que la Chenille la courbe en dessus, alors le plan des fils est plus élevé que la surface de la feuille, & la Chenille va se mettre sur le dessus de cette toile. Mais si la Chenille roule la feuille en dessous, le plan de chaque toile est plus bas que celui de la feuille, & la Chenille charge cette toile, tantôt en se posant sur la surface intérieure, & elle est alors dans une situation naturelle, tantôt en se mettant à la renverse sur la surface extérieure, & tenant ses jambes cramponnées entre les fils de la toile. Il y en a même qui ne travaillent à plier les feuilles de Chêne, qu'en se tenant cramponnées de la forte.

Des circonstances déterminent quelquefois des Chenilles, qui plient ordinairement des feuilles en dessous, à les plier en dessus, elles profitent des dispositions qu'a la feuille à se contourner plus d'un côté que de l'autre; c'est ce que m'ont fait voir celles que j'ai fait travailler chez moi. Ainsi il ne leur est pas absolument essentiel de ronger la feuille par une de ses surfaces, plutôt que par l'autre. Il y a des feuilles de Chêne qui sont pliées par le moyen de paquets, de liens de fils, pareils à ceux qu'employent les rouleuses; mais on trouve assez ordinairement dans l'intérieur du pli, des toiles, qui ont apparemment servi à achever d'approcher les deux parties l'une de l'autre.

Toutes ces Chenilles se métamorphosent en Papillons, mais la plupart très petits, ce qui

qui m'a fait négliger de les faire graver.

Diverses especes d'Araignées courbent aussi des feuilles, d'autres les plient, & d'autres les assemblent en paquet. Ce que nous avons vu pratiquer aux Chenilles, met assez au fait des différentes manieres dont s'y peuvent prendre les Araignées, qui font de maîtresses fileuses. Au reste, si les Araignées plient des feuilles, c'est pour s'y renfermer avec leurs œufs, qu'elles déposent sur ces mêmes feuilles, & qu'elles y envelopent de foye. Là elles se placent sur le paquet d'œufs, sur lequel elles restent constamment, comme s'il avoit besoin d'être couvé.

#### EXPLICATION DES FIGURES.

**L**A *Figure 1.* représente une feuille, dont le bout a été roulé vers le dessous. La face *AA*, qui paroît ici, est celle de dessous. *BC* le rouleau, dont la partie qui paroît est une portion du dessus de la feuille. *lo, lo, lo*, marquent quelques-uns des liens de foye qui tiennent cette feuille roulée.

La *Figure 2.* est celle d'une feuille roulée parallèlement, ou à peu près, à sa principale nervure *N*. La face *AN* est le dessous de la feuille. *BC* le rouleau. *lo, lo, lo*, quelques-uns des liens de foye qui conservent ce rouleau dans sa forme. Ici il n'y a à peu près que la moitié de la feuille roulée.

La *Figure 3.* est celle d'une feuille roulée en entier, parallèlement à sa principale nervure. *ll, ll*, les liens du rouleau.

La *Figure 4.* fait voir une Chenille, qui pro-



profitant de la petite courbure que la feuille a en *A*, va travailler à la rouler parallèlement à sa principale nervure.

La *Figure 5.* & la *Figure 6.* représentent des Chenilles en différentes attitudes, qui n'ont encore collé leurs fils que sur le plat de la feuille, & au-dessous de la partie courbée, ou à son bord.

La *Figure 7.* représente une Chenille qui colle un fil en dessus de la feuille, en dessus de la partie repliée.

La *Figure 8.* est celle d'une feuille qu'une Chenille a commencé à rouler par le bout. Elle a déjà attaché les liens *lo*, *lo*, & file actuellement le lien *IK*.

Dans la *Figure 9.* la Chenille a filé trois liens *o*, *lo*, *lo*, & va en commencer un quatrième.

La *Figure 10.* montre un rouleau, dont le premier tour est fini, & dont le second est commencé. Les liens *AN* de ce tour sont au-dessus des liens *lo* du tour précédent.

La *Figure 11.* est celle d'une feuille, dont le second tour est roulé sur une plus grande longueur que dans la *Fig. 10.*

La *Figure 12.* représente deux plans de lignes *AB*, *CD*, qui se croisent en *E*: elle donne en grand une image de la structure de chaque lien *lo* des autres Figures. Les lignes de chacun de ces plans doivent être regardées comme autant de fils.

Dans la *Figure 13.* une Chenille est représentée filant le premier plan *AB* des fils, dont un paquet ou lien est composé.

Dans les *Figures 14.* & *15.* la Chenille a chen-

changé de côté, & file le second plan supérieur des fils du lien *CD*. Dans la Fig. 14, elle colle le bout d'un nouveau fil en *C*, & dans la Fig. 15, elle colle l'autre bout du même fil en *D*; & pendant qu'elle l'y colle, le poids de son corps charge le premier plan.

La Figure 16. est la coupe d'un rouleau, qui fait environ deux tours; on y voit les fils des liens *lo* lâches & flottans, pendant que les fils supérieurs du lien *NM* du second tour sont seuls tendus.

La Figure 17. représente notre Chenille rouleuse dans la grandeur naturelle. On l'a dans d'autres attitudes, dans plusieurs des Figures précédentes.

La Figure 18. est celle d'une feuille que la Chenille a roulée lorsqu'elle étoit prête de se métamorphoser. Les fils qui maintiennent le dernier tour de ce rouleau depuis *p* jusqu'en *q*, ne sont pas disposés par paquets, ils forment une espèce de toile. En *r* est la coque de la Chrysalide, d'où l'Insecte est sorti sous la forme de Papillon.

La Figure 19. représente une Chrysalide de cette Chenille, vue par dessous en *A*, & par dessus en *B*.

La Figure 20. est la Chrysalide *A* dessinée plus grande que nature.

Les Figures 21 & 22. sont celles de deux des Papillons dans lesquels nos Chenilles se transforment. Celui de la Figure 21 est plus petit que celui de la Fig. 22.

La Figure 23. est celle d'une feuille de Chêne, dont le bout *bcb* a été plié en dessous.

La Figure 24, représente une de ces feuilles.

les de Pommiers que les Chenilles se contentent de courber.

La *Figure 25.* fait voir une Chenille qui commence à attacher des feuilles de Pommier pour la courber: elle a déjà fait une espece de toile composée de fils paralleles.

Dans la *Figure 26.* la Chenille a filé une seconde portion de toile: un des bouts de chacun des fils de celle-ci est attaché sur la toile précédente. Les fils de la derniere croisent les fils de la premiere, leur direction est oblique à celle des autres. Entre *f, f*, on voit que les fils de la seconde toile sont attachés à ceux de la premiere.

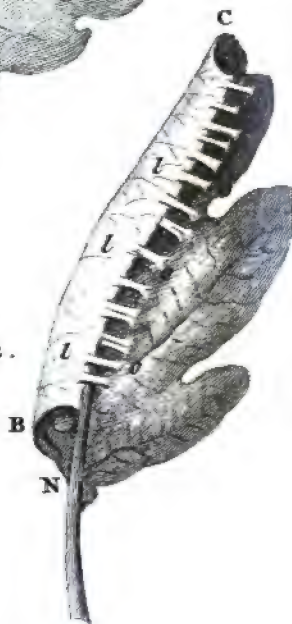
La *Figure 27.* est celle d'une feuille de Pommier pliée vers le dessous. *BCD* est un bourlet ou cordon foyeux, qui entoure la dentelure de la partie pliée.

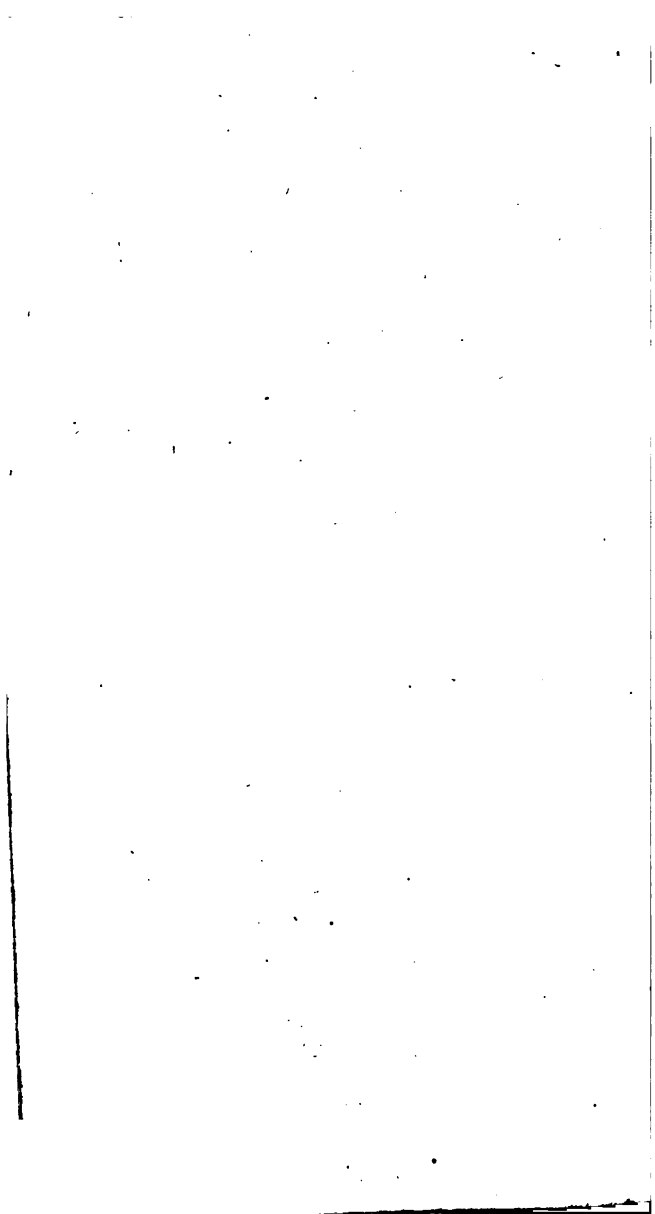
La *Figure 28.* fait voir la feuille précédente, dans un tems où elle n'étoit pas entierement pliée. En *efg* paroissent les toiles, qui plus pressées les unes contre les autres, font le bourlet foyeux, lorsque la portion de la feuille est entierement pliée.

Fig. 1.



Fig. 2.





*Fig. 4.*

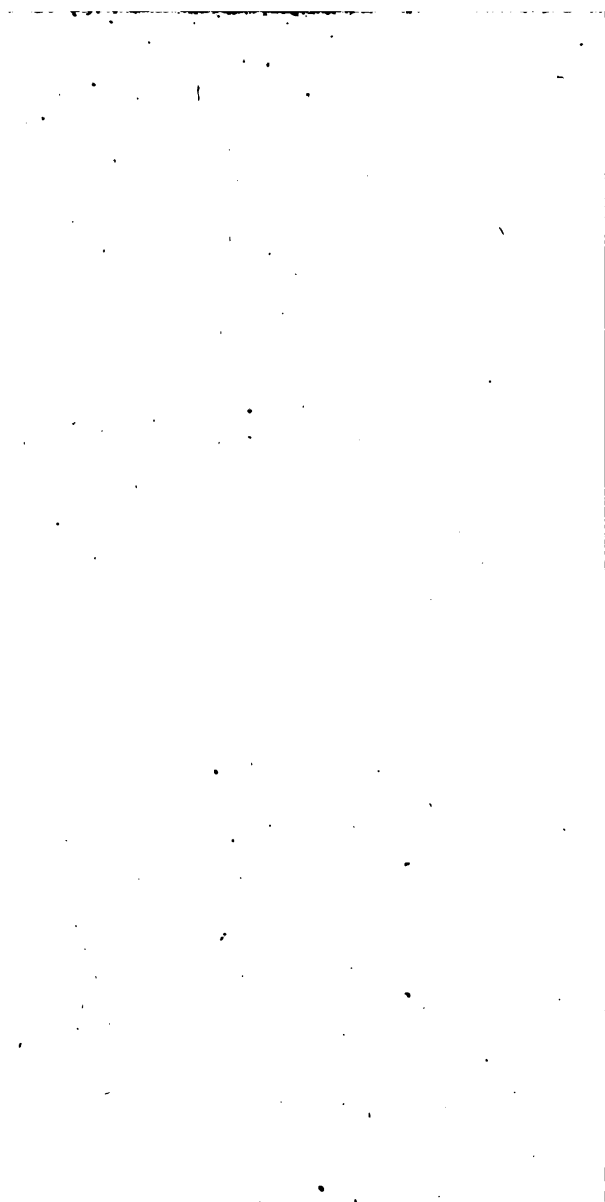


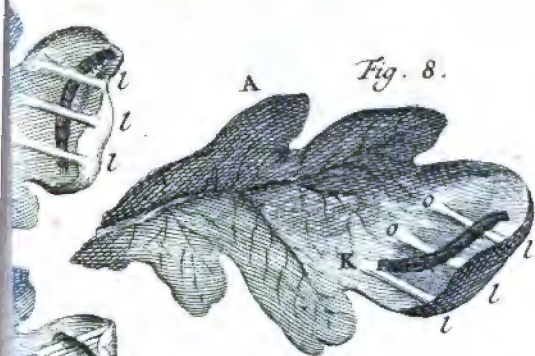
*Fig. 5.*



*Fig. 6.*





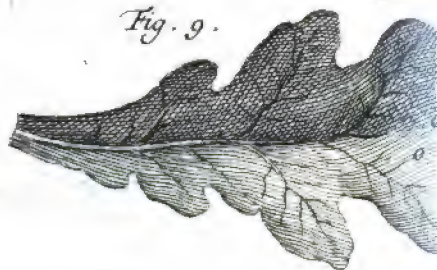


*Fig. 10.*





*Fig. 9.*

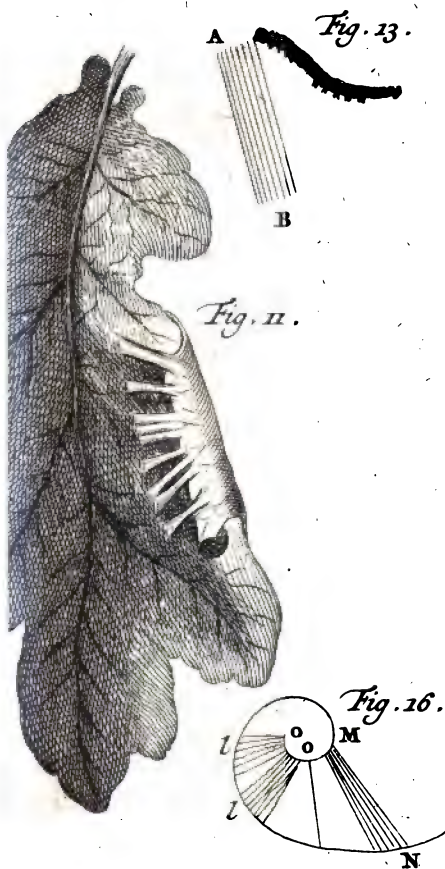


*Fig. 10.*

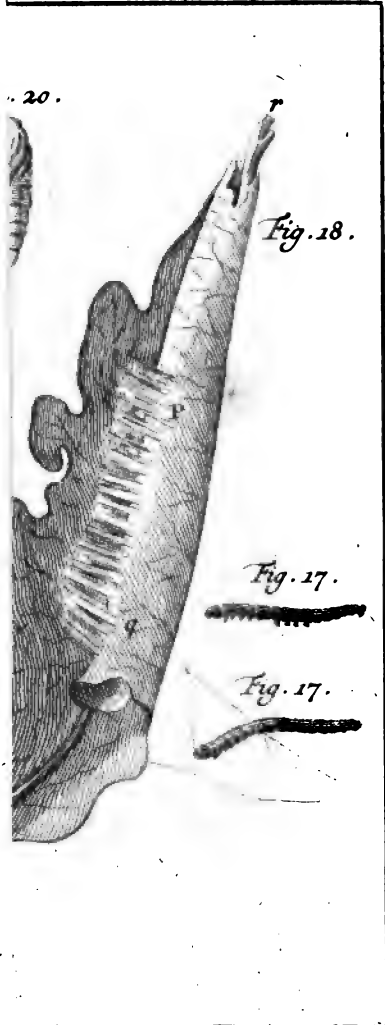


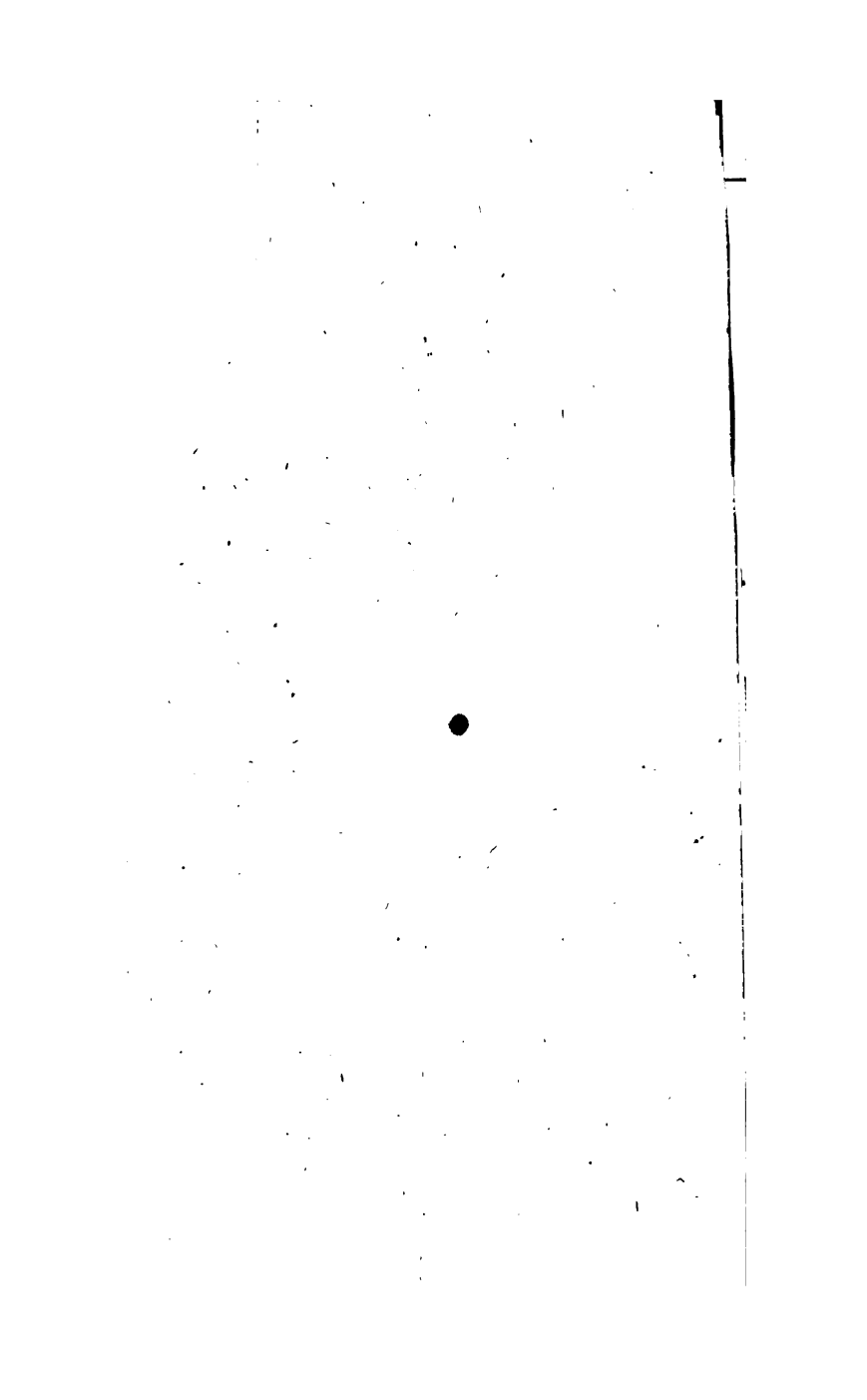




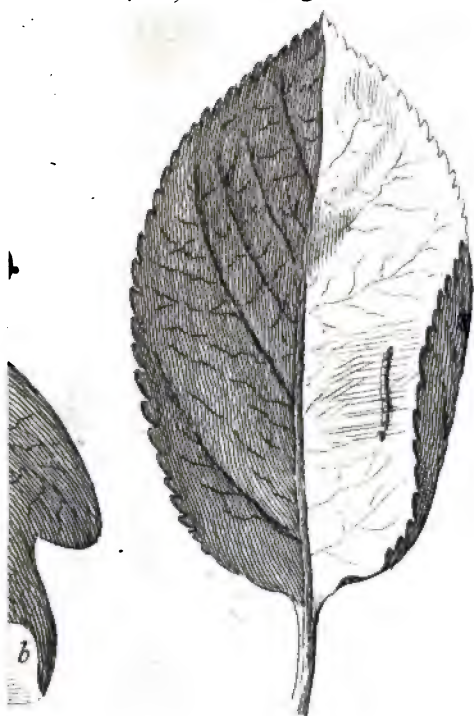








*Fig. 24.*





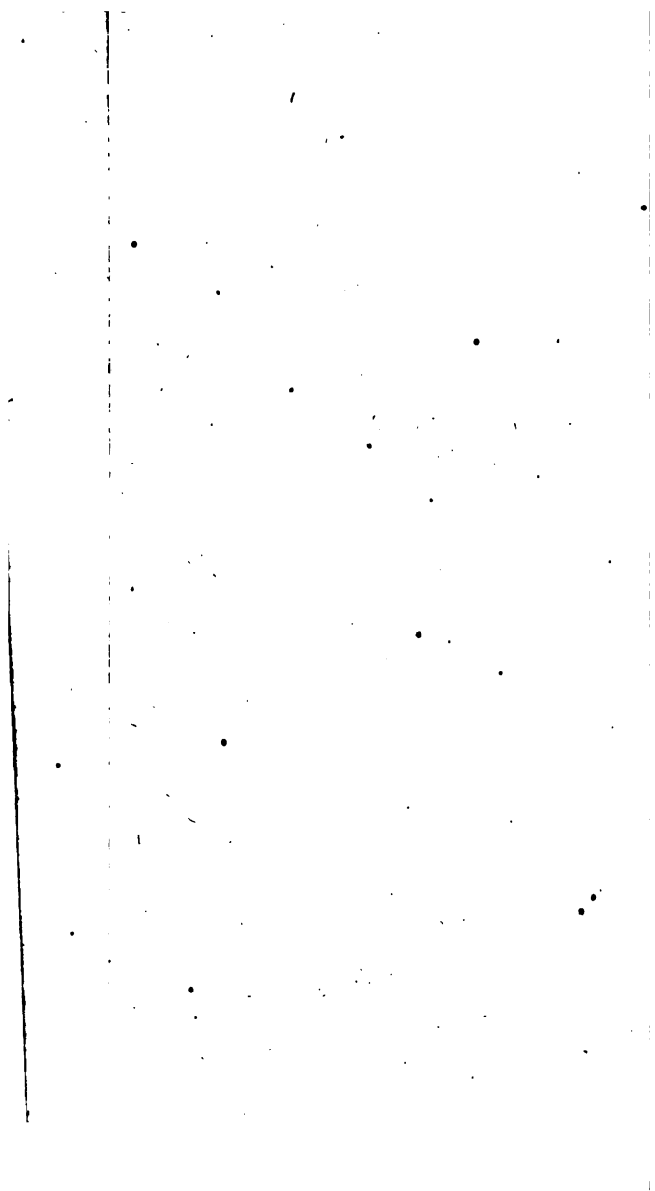
1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

*Fig. 26.*

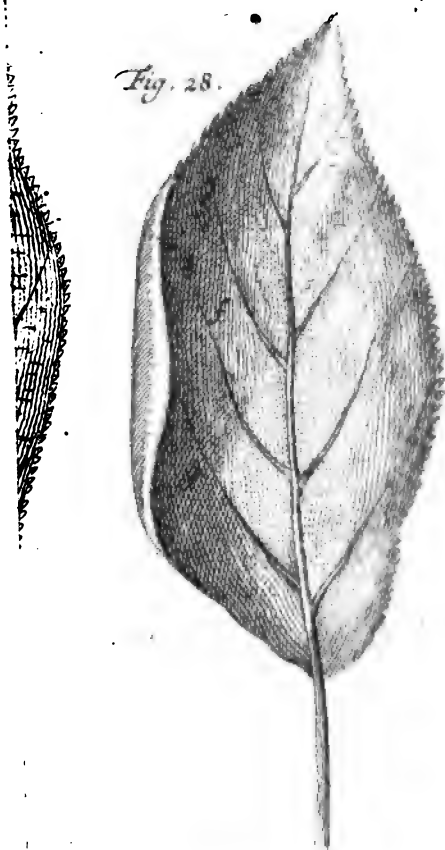


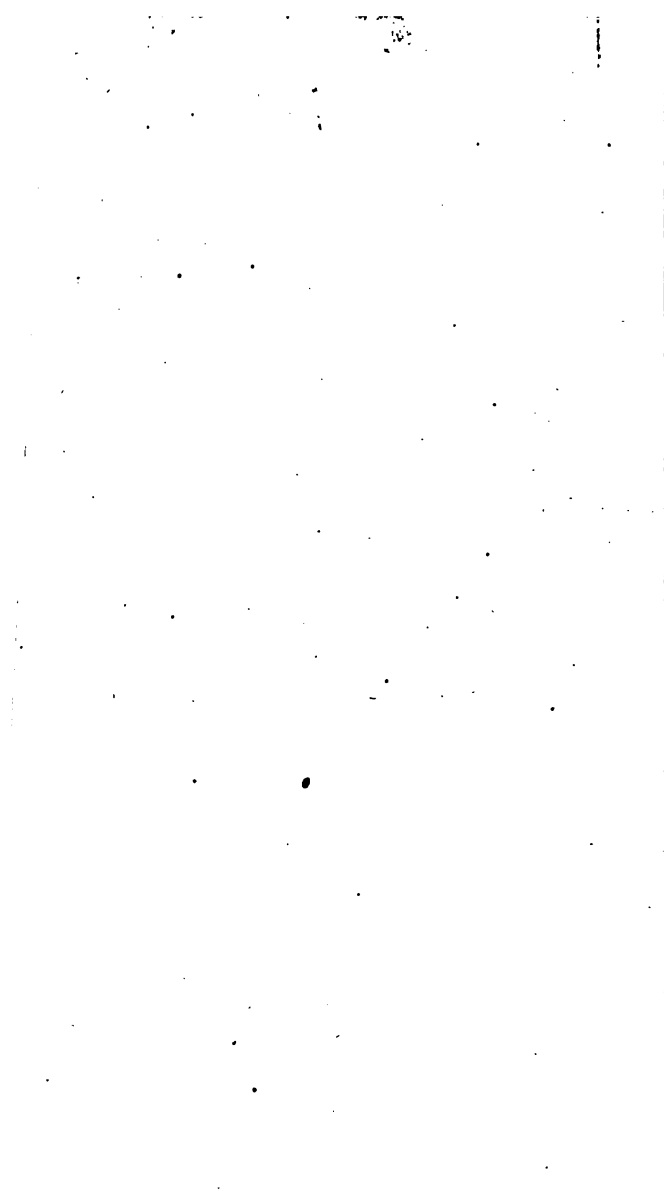
*Fig. 25.*





*Fig. 28.*





## M E T H O D E

*Pour trouver les Tantochrones, dans des Milieux résistans, comme le Quarré des Vitesse.*

Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à Bâle.

**A**VANT que d'entreprendre la Solution générale, voici quelques considérations nécessaires sur les fonctions semblables composées d'indéterminées proportionnelles.

**DEFINITION I.** Si l'on forme une fonction quelconque d'une quantité déterminée  $a$ , & d'une indéterminée  $x$ , de maniere que  $a$  &  $x$  fassent ensemble le même nombre de dimensions dans chaque terme; prenant ensuite une autre déterminée  $A$ , & une indéterminée  $X$ , proportionnelles aux premières  $a$  &  $x$ , c'est-à-dire, telles que  $a : A :: x : X$ , si l'on forme de  $A$  &  $X$  une nouvelle fonction, pareille à celle qu'on a formée de  $a$  &  $x$ , j'appelle ces deux fonctions, & les autres de cette espece, *fonctions semblables*. Ainsi par exemple,  $a^3 + faax + gaxx + bx^3$  &  $A^3 + fAAX + gAXX + bX^3$  sont des fonctions semblables; de même  $\sqrt{a^4 + fx^4}$  &  $\sqrt{A^4 + fX^4}$ ;

$$\frac{aa + fax + gxx}{ba^3 + ix^3} \text{ \& } \frac{AA + fAX + gXX}{bA^3 + iX^3};$$

$$a + \sqrt{ax + fxx} \text{ \& } A + \sqrt{AX + fXX};$$

$$\frac{a+x}{axx + f\sqrt{a^6 + x^6}} \text{ \& } \frac{A+X}{AXX + f\sqrt{A^6 + X^6}};$$

&

& ainsi des autres, prenant toujours  $f, g, b, i,$  &c. pour des coefficients numériques.

DEFINITION II. J'appelle aussi *fonctions semblables transcendentes*, celles des précédentes qui seroient multipliées par  $dx$  &  $dX$ , & qui seroient supposées intégrées par le signe  $\int$ .

Ainsi par exemple,  $\int \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$  &  $\int \frac{AdX}{\sqrt{AA-XX}}$  sont des fonctions semblables transcendentes, & ainsi des autres.

DEFINITION III. Les fonctions semblables, soit algébriques soit transcendentes, sont estimées être d'une telle ou telle dimension, dont l'exposant est le nombre qui reste, quand on retranche l'exposant des termes du dénominateur, de l'exposant des termes du numérateur, en comptant  $dx$  ou  $dX$  pour une dimension; & s'il y a des signes radicaux, en divisant d'abord l'exposant des termes par l'exposant du signe. Ainsi  $\sqrt{a^4+x^4}$  est

réputé de deux dimensions;  $\frac{a+x}{axx+\sqrt{a^5+x^5}}$

aura pour dimension  $1-3=-2$ ;  $\int \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$

est d'une dimension, parce que  $adx$  est de deux dimensions, &  $\sqrt{aa-xx}$  d'une;

ainsi cette fonction  $\int \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$  a pour ex-

posant  $2-1=1$ , de même  $\frac{a^3+\sqrt{axx}}{gaxx+\sqrt{bx^3}}$

&  $\int \frac{axdx}{f a^3+g x^3}$  n'ont aucune dimension, parce

que  $3-3=0$ .

THEO.

## THEOREME.

Toutes les fonctions semblables, transcendentes, soit algébriques, sont entre elles comme leurs quantités semblables à  $\mathfrak{G}^2 A$ , ou  $x \mathfrak{G}^2 X$ , élevées au même exposant que ces fonctions. Ainsi par ex.

$$\begin{aligned} aa.AA::(xx.XX::) \frac{a^3 + f a x x}{g x} . \frac{A^3 + f A X X}{g X} \\ :: f d x \sqrt[3]{(aa + x x)} . f d X \sqrt[3]{(AA + X X)} \\ :: f \frac{x^3 dx}{aa + ax} . f \frac{X^3 dX}{AA + AX} ; \text{ de même } \frac{x}{a} . \frac{X}{A} \\ :: \left( \frac{x}{a} . \frac{X}{A} :: \right) \frac{x}{\sqrt[3]{(aa - xx)}} . \frac{X}{\sqrt[3]{(AA - XX)}} \\ :: f \frac{a dx}{\sqrt[3]{(a^3 - x^3)}} . f \frac{A dX}{\sqrt[3]{(A^3 - X^3)}} :: f \frac{dx}{\sqrt[3]{(a^3 + x^3)}} \\ . f \frac{dX}{\sqrt[3]{(A^3 + X^3)}}, \mathfrak{G}^2 \text{ ainsi des autres.} \end{aligned}$$

COROLL. L'on voit par-là que toutes les fonctions semblables, qui n'ont aucune dimension, sont égales entre elles: car elles sont comme  $a^0$  à  $A^0$ , ou comme  $x^0$  à  $X^0$ . Mais  $a^0 = 1 = A^0$ , ou  $x^0 = 1 = X^0$ . Ainsi par

$$\begin{aligned} \text{exemple } \int \frac{a dx}{\sqrt[3]{(a^3 - x^3)}} &= \int \frac{A dX}{\sqrt[3]{(A^3 - X^3)}} ; \int \frac{a a dx + x x dx}{a^3 + f x^3} \\ &= \int \frac{A A dX + X X dX}{A^3 + f X^3} ; \frac{a + \sqrt[3]{(aa - xx)}}{f \sqrt[3]{(axx)}} \\ &= \frac{A + \sqrt[3]{(AA - XX)}}{f \sqrt[3]{(AXX)}} ; \frac{a + f x}{a - g x} + \frac{aa + b a x}{aa - g x x} \\ &= \frac{A + f X}{A - g X} + \frac{AA + b A X}{AA - g X X}, \text{ \& ainsi des autres.} \end{aligned}$$

SCHO.



SCHOLIE. J'ai déjà traité ce même sujet autrefois, dans un Mémoire[que donna feu mon Fils Nicolas, inséré dans le VII<sup>e</sup>. Tome des Suppl. des Act. de Leipf. pag. 322. La démonstration se présente d'elle-même, pour peu qu'on y fasse attention, & est plus facile à concevoir qu'à expliquer. Cette considération est le seul moyen de se bien conduire dans la recherche des Tautochrones, & des autres Courbes où l'on est obligé de considérer les fonctions semblables, comme l'on verra dans la suite.

### PROBLEME I, ET PRINCIPAL.

*Décrire la Courbe par laquelle un corps descendant par sa pesanteur dans un milieu d'une densité uniforme, de quelque point de la Courbe qu'il commence à descendre, parvienne toujours dans un tems égal au point le plus bas; & de là remonte dans le même tems par l'autre branche de la Courbe jusqu'ou il pourra remonter, en supposant la résistance comme le quarré des vitesses.*

§. I. SOLUT. J'appelle l'Arc total *descendu*, celui qui est compris entre le point le plus élevé d'où le corps commence à descendre, & le point le plus bas; l'Arc total *remonté*, celui qui est compris entre le point le plus bas que je prends pour le *sommet* de la Courbe, & le point jusqu'ou il peut remonter avec sa vitesse acquise, jusqu'à ce qu'il ait perdu toute sa vitesse; l'Arc *partial*, soit descendu, soit remonté, est une partie quelconque indéterminée d'un Arc total quelconque, prise depuis le sommet jusqu'au lieu de la Courbe

be où se trouve le corps, soit en descendant, soit en montant.

II. Soit maintenant la gravité qui anime les corps  $=g$ , la vitesse dans un point quelconque de l'Arc total  $=v$ , l'Arc partial  $=r$  (je l'appelle plutôt  $r$  que  $s$ , parce que la lettre  $s$  se confondroit facilement avec le nombre 5) l'Abscisse prise sur l'Axe élevé verticalement depuis le sommet de la Courbe, correspondante à l'Arc partial,  $=x$ , l'Applicquée correspondante au même Arc,  $=y$ , la résistance qu'on suppose proportionnelle au carré de la vitesse,  $=\frac{vv}{n}$ , où

j'entends par  $\frac{1}{n}$ , l'intensité de cette résistance,  $n$  étant constant pour un arc total quelconque.

III. Par la décomposition de la force de la pesanteur en tangentielle & normale, l'on a la force tangentielle  $=\frac{gdx}{dr}$ ; de laquelle ôtant, lorsque le corps descend, ou à laquelle ajoutant, lorsque le corps remonte, la force de la résistance  $\frac{vv}{n}$ , l'on a pour la force accé-

lératrice ou retardatrice  $\left(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n}\right)$  Not.

B. ( le signe supérieur ayant lieu lorsque le corps descend, & l'inférieur lorsqu'il remonte, ce qu'il faudra aussi toujours observer dans la suite ) l'on aura donc  $\left(\frac{gdx}{dr} \mp \frac{vv}{n}\right)$

$\times \frac{dr}{v} = -dv$ ; d'où l'on tire cette Equation  $g dx + \frac{vv dr}{n} = -v dv$  à laquelle il faut

satisfaire. En faisant  $dr = \frac{dz}{z}$ , il vient

$$ngz dx + vvdz = -nzv dv, \text{ ou } -2gzdx = +\frac{2}{n} vvdz + 2zv dv; \text{ divisant par}$$

$$z + \frac{2}{n} + 1, \text{ l'on aura } -2gz + \frac{2}{n} dx =$$

$$\left( +\frac{2}{n} vvdz + 2zv dv \right) z + \frac{2}{n} - 1. \text{ Pour}$$

intégrer cette Equation, il ne suffit pas d'é-

$$\text{crire } -2gz + \frac{2}{n} dx = v v z + \frac{2}{n}, \text{ ( car}$$

$$\text{cette valeur de } v v z + \frac{2}{n}, \text{ exprimée par}$$

$$-2gz + \frac{2}{n} dx, \text{ est incomplete, n'appar-}$$

$$\text{tenant à aucun arc total) mais } 2gA -$$

$$2gz + \frac{2}{n} dx = v v z + \frac{2}{n}, \text{ où je prends}$$

$$A \text{ pour quelque chose de constant, à quoi}$$

$$gz + \frac{2}{n} dx \text{ devient égal, lorsque } x \text{ devient}$$

$$\text{l'Abscisse correspondante à quelque arc total,}$$

$$\text{de maniere que } A \text{ soit constant pour cet arc}$$

$$\text{total}$$

total entier, mais différent pour un arc total différent.

IV. L'on a donc  $vv = 2g Az \pm \frac{z^2}{n}$   
 $- 2gz \pm \frac{z^2}{n} \int z \mp \frac{z}{n} dx =$  (à cause  
 de  $z = r^2$ , j'entends par  $c$  le nombre dont  
 le logarithme est l'unité)  $2gAc \pm \frac{z^2}{n}$   
 $- 2gc \pm \frac{z^2}{n} \int r \mp \frac{z}{n} dx$ . Et ainsi de  
 tout le petit tems par l'élément d'un arc total  
 quelconque fera

$$= \frac{dr}{\sqrt{(2gAc \pm \frac{z^2}{n} - 2gc \pm \frac{z^2}{n} \int r \mp \frac{z}{n} dx)}}$$

ou pour abréger, en multipliant par la constante  $\sqrt{2g}$ , l'on aura

$$dt\sqrt{2g} = \frac{dr}{\sqrt{(Ac \pm \frac{z^2}{n} - c \pm \frac{z^2}{n} \int r \mp \frac{z}{n} dx)}}$$

Afin donc que le tems, que le corps emploie à descendre ou à remonter par un arc total quelconque, soit toujours le même, il faut

faire en sorte que la valeur de  $\int \frac{dz}{2g}$ , qu'on vient de trouver, soit égale à quelque fonction semblable de dimension nulle, comme

par exemple,  $\int \frac{m dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$ , où j'entends par  $m$  un nombre arbitraire constant, & dans laquelle le changement de la lettre  $A$  ne change point la valeur de la fonction; car

$\int \frac{m dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$  donne toujours un angle droit pris autant de fois que  $m$  contient d'unités, de quelque grandeur qu'on prenne  $A$ , lorsque  $PP$  devient  $= AA$ .

V. Pour faire donc en sorte que la valeur du tems qu'on vient de trouver

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(Ac^{\pm \frac{2r}{n}} - c^{\pm \frac{2r}{n}} \int c^{\pm \frac{2r}{n}} dx)}}$$

soit semblable à la somme qu'on a choisie

$\int \frac{m dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$ , j'écris dans l'expression du tems  $AA$  pour  $A$ , & je divise l'un & l'autre

terme par  $c^{\pm \frac{r}{n}}$ , & j'ai

$$\int \frac{c^{\pm \frac{r}{n}} dr}{\sqrt{(AA - \int c^{\pm \frac{2r}{n}} dx)}}$$
, que je suppose

$= \int \frac{m dP}{\sqrt{(AA-PP)}}$ . La question se réduit

donc à faire en sorte que  $c^{\pm \frac{r}{n}} dr = m dP$ ,

& que de plus  $\int c^{\pm \frac{2r}{n}} dx = PP$ , car  
on

on tirera de-là la relation entre  $r$  &  $x$  dans laquelle  $A$  n'entrera point : ce que je fais ainsi.

VI. Par la première Equation, l'on a

$$\frac{x}{m} c \mp \frac{r}{n} dr = dP; \text{ j'é l'integre, en ob-}$$

servant la correction nécessaire, afin que  $r$  &  $P$  s'évanouissant, la valeur de  $P$  s'évanouisse

$$\text{aussi, \& l'on aura } \mp \frac{n}{m} c \mp \frac{r}{n} \pm \frac{n}{m} = P;$$

$$\text{en quarrant, l'on a } \frac{x}{m m} (\mp n c \mp \frac{r}{n} \pm n)^2 = P \bar{P}$$

qui doit être  $= f c \mp \frac{2r}{n} dx$ ; en différen-  
tiant le premier & le dernier, l'on aura

$$\frac{2x}{m m} c \mp \frac{r}{n} dr (\mp n c \mp \frac{r}{n} \pm n) = c \mp \frac{2r}{n} dx;$$

$$\text{d'où l'on tire tout d'un coup } dx = \frac{2x}{m m} c \mp \frac{r}{n} dr$$

$$(\mp n c \mp \frac{r}{n} \pm n) = \mp \frac{2n}{m m} dr \pm \frac{2n}{m m} c \mp \frac{r}{n} dr$$

$$\text{où } m m dx = \mp 2n dr \pm 2n c \mp \frac{r}{n} dr; \text{ en}$$

intégrant & faisant encore la correction né-  
cessaire, afin que  $x$  s'évanouissant,  $r$  s'éva-  
nouis-

soit aussi, l'on aura  $m m x = -2 n n - \frac{r}{n}$

$-\frac{r}{n}$ ; qui est l'Equation exponentielle en termes finis, qui détermine la Tautochrone que l'on cherche. Si l'on veut avoir une Equation différentielle sans quantités exponentielles, on le pourra de la manière suivante: Par l'Equation qu'on vient de

trouver, l'on a  $2 n n c^{\frac{r}{n}} = m m x - \frac{r}{n}$

$-\frac{r}{n}$ ; mais par l'Equation différentielle qu'on avoit trouvée auparavant, l'on a aussi

$2 n n c^{\frac{r}{n}} = \pm \frac{m m n d x}{d r} + 2 n n$ ; donc

$m m x - \frac{r}{n} + 2 n n - \frac{r}{n} = \pm \frac{m m n d x}{d r} + 2 n n$ ,

qui réduite, donne  $m m x d r + 2 n r d r = \pm m m n d x$ , ou  $\pm m m x d r + 2 n r d r = \pm m m n d x$ .

VII. Coroll. 1. Lorsque  $n = \infty$ , c'est-à-dire, lorsque  $\frac{v v}{n}$  ou la résistance est nulle, l'on au-

ra  $2 r d r = m m d x$  &  $r r = m m x$ ; d'où l'on voit que les abscisses sont proportionnelles aux carrés des arcs correspondans, & qu'ainsi la Courbe est la Cycloïde, comme il doit arriver; car dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne résiste point, il n'y a que la Cycloïde qui puisse être Tautochrone.

VIII. Coroll. 2. Mais si  $n$  demeurant finie, l'on

l'on prend  $m = \infty$ , l'on trouve  $\pm x dr = n dx$ , qui est l'Equation de la Tractoire de M. Huygens, dont la tangente est par-tout  $= n$ ; en sorte que cette Tractoire est une des Tautochrones dans un milieu résistant comme les quarrés des vitesses; mais comme ici le point le plus bas est à une distance infinie, car c'est le point où la tangente se confond avec l'asymptote horizontale, l'on voit que les tems de chaque descente, de quelque point de la Courbe qu'on commence à les compter, sont infinis, mais cependant égaux, car dans certains cas les infinis ont entre eux une raison déterminée; paradoxe qui n'a rien de nouveau pour ceux qui sont versés dans le Calcul infinitésimal.

*Construction de la Tautochrone.*

IX. Voici comme on peut construire la Tautochrone, que nous venons de trouver:

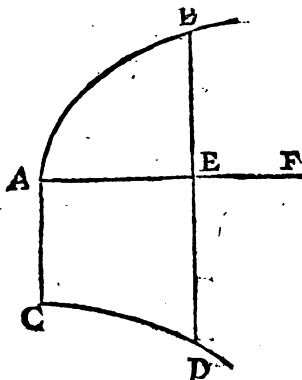
Puisque  $dx = \pm \frac{2ndr}{mm} \pm \frac{2nc}{mm} \pm \frac{r}{n} dr$ , l'on aura  $dy$  ou  $\sqrt{(dr^2 - dx^2)} = dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc \pm \frac{r}{n} - 4nnc \pm \frac{2r}{n})} : mm$ , &c

ainsi  $y = \int dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc \pm \frac{r}{n} - 4nnc \pm \frac{2r}{n})} : mm$ . Et comme l'on a de



plus  $x = (-2nn \mp 2nr + 2nnc \pm \frac{r}{n}) : mm$ ,

l'on aura les deux valeurs de  $x$  &  $y$ , en supposant les quadratures & les logarithmes pour une indéterminée  $r$  qu'on prendra.



Ayant donc décrit sur l'Axe commun  $AF$  les deux Courbes  $AB$  &  $CD$ , telles que prenant l'abscisse  $AE = r$ , l'on ait l'appliquée

$$BE = \pm \frac{n}{mn} \mp \frac{2nc}{mn} \pm \frac{r}{n}, \text{ \& l'autre } ED$$

$$= \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc \pm \frac{r}{n} - 4nnc \pm \frac{2r}{n})} :$$

$mm$ , les aires  $ABE$  &  $ACDE$  divisées par une ligne arbitraire  $L$ , donneront les coordonnées de la Courbe que l'on cherche; savoir

voir  $\frac{ABE}{L} = x$  &  $\frac{ACDE}{L} = y$ .

## S C H O L I E.

X. *m* marquant un multiple quelconque arbitraire de l'angle droit, notre solution donnera toujours une infinité de Tautochrones particulieres selon la diversité infinie de *m*; ce qu'on voit assez, puisque dans le cas même où  $m = \infty$ , l'on trouve encore une Tautochrone, qui est la Tractoire de M. Huygëns (§. 8.) Au reste, l'on tire de notre Solution générale plusieurs autres Problèmes utiles & curieux, comme ceux-ci.

## P R O B L E M E I I.

XI. *La longueur d'un Arc total quelconque descendu dans l'Hypothèse que nous avons prise d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total remoné qui le suit immédiatement.*

## S O L U T I O N.

Puisque nous avons trouvé pour la descen-

$$te (\S. 4.) \quad v v = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - 2gc^{\frac{2r}{n}} \int c^{\frac{2r}{n}} dx$$

$$\& \int c^{\frac{2r}{n}} dx = (\S. 6.) \quad \frac{1}{m n} (-nc^{\frac{r}{n}} + n)$$

$$+ n)^2 = \frac{n n}{m m} (c^{\frac{2r}{n}} - 2c^{\frac{r}{n}} + 1) \quad \text{l'on}$$

F 5

l'on aura  $vv = 2gAc^{\frac{2r}{n}} - \frac{2nn^2g}{nn} (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n})$

$+ c^{\frac{r}{n}} + \frac{2r}{n}$ . Supposant maintenant l'Arc total descendu  $= a$ , il faut qu'au commencement de la descente,  $vv$  soit  $= 0$ , c'est pour-

quoi il faut faire  $2gAc^{\frac{2r}{n}} = \frac{2nn^2g}{nn} (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n})$

$+ c^{\frac{r}{n}} + \frac{2r}{n}$ , d'où l'on tire  $A = \frac{nn}{nn} (c^{\frac{r}{n}} - \frac{2r}{n} - 2c^{\frac{r}{n}} + 1)$

$- 2c^{\frac{r}{n}} + 1) =$  (lorsque  $r$  devient

$= a$ )  $\frac{nn}{nn} (c^{\frac{2a}{n}} - 2c^{\frac{a}{n}} + 1) = \frac{nn}{nn}$

$(1 - c^{\frac{a}{n}})^2$ . Et puisque au point le plus

bas de la descente, lorsque  $r=0$ ,  $fc^{\frac{2r}{n}} dx$  s'évanouit, l'on aura  $vv$ , ou le carré de la vitesse finale du mobile descendant

$= 2gAc^{\frac{2r}{n}} =$  (à cause de  $r=0$ )  $2gA =$  (à

cause de  $A = \frac{nn}{nn} (1 - c^{\frac{a}{n}})^2$ )  $\frac{2nn^2g}{nn}$

(1

$(1 - e^{-\frac{a}{n}})^2$ . Je trouve par un raisonnement semblable, en prenant les signes inférieurs, & nommant l'arc total remonté  $b$ , le quarré de la vitesse initiale du mobile re-

montant  $= \frac{2nn^2}{nn} (e^{\frac{b}{n}} - 1)^2$ . Mais la vitesse finale du mobile descendant est la même que la vitesse initiale du mobile remon-

tant; d'où il suit que  $1 - e^{-\frac{a}{n}} = e^{\frac{b}{n}} - 1$ ,

&  $e^{\frac{b}{n}} = 2 - e^{-\frac{a}{n}} = 2 - \frac{1}{e^{\frac{a}{n}}} = \frac{2e^{\frac{a}{n}} - 1}{e^{\frac{a}{n}}}$ ; pre-

nant les logarithmes du premier & du dernier,

l'on a  $\frac{b}{n} = 1(2e^{\frac{a}{n}} - 1) - \frac{a}{n}$ , d'où en-

fin l'on a  $b = n(2e^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ .

**XII. Scholie.** La valeur de  $b$  qu'on vient de trouver, a toujours lieu pour quelque valeur de  $n$  que ce soit; mais si  $n = \infty$ , c'est-à-dire, si la résistance est infiniment petite ou nulle, l'on devroit trouver  $b = a$ , parce que le mobile dans le vuide remonte aussi haut qu'il étoit descendu, & l'arc total remonté dans la Cycloïde (qui est la Tautochrone dans le vuide) doit être égal à l'Arc total des

descendu précédent ; cependant notre expression ne paroît pas donner  $b = a$ , car  $n!$

$(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$  devient  $\infty / (2c^{\frac{a}{\infty}} - 1)$  ;  
 $= a = \infty / (2c^0 - 1) - a = \infty / (2 - 1) - a$  ;  
 $= \infty / (1) - a = \infty \times 0 - a$ , ce qui ne fait rien connoître de déterminé ; puisque  $\infty \times 0$ , ou le produit de l'infini par un infiniment petit, peut exprimer une quantité quelconque. Pour résoudre cette difficulté, j'ai deux moyens, l'un indirect, l'autre direct, de fai-

re voir que  $n! (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$  devient effectivement  $= a$ , lorsque  $n = \infty$ . En me servant du premier moyen, je supposerai  $b = a$ , & chercherai ensuite ce qu'il faut prendre pour

$n$ , afin que la valeur de  $b, n! (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$  devienne  $= a$  ; pour cela je fais  $a = n!$

$(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ , d'où l'on a  $2a = n!$

$(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$  ; & passant des logarith. aux

nombres, j'ai  $c^{2a} = (2c^{\frac{a}{n}} - 1)^n$  ou  $c^{\frac{2a}{n}}$

$= 2c^{\frac{a}{n}} - 1$ , qui est une Equation quar-  
 rée, dont la racine extraite à l'ordinaire,  
 don-

donne  $e^{\frac{a}{n}} = 1 \pm \sqrt[n]{(1-1)} = 1 \pm 0$ , & prenant les logarithmes, l'on a  $\frac{a}{n} = 1 = 0$ , donc  $n = \infty$ , d'où il suit que dans le cas où

$n = \infty$ , l'on aura  $b$  ou  $n! (2e^{\frac{a}{n}} - 1)$   
 $\rightarrow a = a.$

XIII. Par le moyen direct, voici ce que je fais; de la quantité  $n! (2e^{\frac{a}{n}} - 1)$  je fais

cette fraction  $l\left(\frac{2e^{\frac{a}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)$  qui lorsque

$n = \infty$ , devient  $\frac{0}{0}$ ; c'est une fraction dont les deux termes s'évanouissent, il faut donc chercher sa valeur par la règle donnée dans l'Anal. des Infin. petits, art. 163, en considérant  $n$  comme variable, & divisant la différentielle du numérateur par la différentielle du dénominateur; ce qui étant fait, l'on

aura  $dl\left(2e^{\frac{a}{n}} - 1\right)$  divisé par  $d\left(\frac{1}{n}\right)$

c'est-à-dire  $-\frac{2e^{\frac{a}{n}} \frac{da \times a}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$  divisé par  $-\frac{dn}{n^2}$ ,  

$$\frac{2e^{\frac{a}{n}} \frac{da \times a}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \div -\frac{dn}{n^2} = F 7 .$$
 d'où

# 185 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

d'où il vient  $\frac{\frac{a}{2c^n} \times a}{\frac{a}{2c^n} - 1} =$  (en substituant

∞ pour  $n$ )  $\frac{2a}{2-1} = 2a$ ; d'où je conclus que

lorsque  $n = \infty$ , l'on aura  $nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) = 2a$ ;

& qu'ainsi  $b = nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a = 2a - a = a$ .

## P R O B L E M E . I I I .

XIV. *Trouver le lieu de la plus grande vitesse dans un Arc total quelconque de descente.*

SOLUTION. Puisque (§. XI.)  $v = 2gAc^{\frac{2r}{n}}$   
 $\frac{2\pi\pi g}{\pi\pi\pi} (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}}) = (\text{ibid.}) \frac{2\pi\pi g}{\pi\pi\pi}$   
 $(1 - c^{\frac{a}{n}})^2 c^{\frac{2r}{n}} = \frac{2\pi\pi g}{\pi\pi\pi} (1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}})$   
 $+ c^{\frac{2r}{n}}$ ; qui étant divisé par la quantité  
constante  $\frac{2\pi\pi g}{\pi\pi\pi}$ , donnera  $c^{\frac{2r}{n}} (1 - c^{\frac{a}{n}})^2$

$-(1 - 2c^{\frac{r}{n}} + c^{\frac{2r}{n}})$ , qui doit être un *maximum*, il faut donc faire la différentielle

$$0 = 0, \text{ \& l'on aura } \frac{2c^{\frac{r}{n}}}{n} dr (1 - c^{\frac{r}{n}})^2$$

$$+ \frac{\frac{r}{n}}{2c^{\frac{r}{n}}} \frac{dr}{dr} - 2c^{\frac{r}{n}} \frac{dr}{dr} = 0, \text{ ou divisant par}$$

$$\frac{2c^{\frac{r}{n}}}{n} dr, \text{ l'on aura } c^{\frac{r}{n}} (1 - c^{\frac{r}{n}})^2$$

$$+ 1 - c^{\frac{r}{n}} = 0, \text{ d'où l'on tirera par la réduction \& le secours des logarithmes,}$$

$$r = 2a - n \log(2c^{\frac{a}{n}} - 1). \text{ Si donc d'un arc total} = a, \text{ l'on retranche depuis le point le plus}$$

bas, une partie  $= 2a - n \log(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$  l'on aura le point de la plus grande vitesse.

XV. *Coroll. 1.* L'arc intercepté entre le commencement de la descente & le point de la plus grande vitesse,  $= a - 2a + n \log$

$$(2c^{\frac{a}{n}} - 1) = n \log(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a. \text{ D'où l'on voit (§. II.) que cet arc, depuis le commencement de la descente jusqu'au lieu de la plus}$$



plus grande vitesse; est égal à l'arc remonté suivant.

XVI. *Coroll. 2.* Ajoutant l'arc commun compris entre le point le plus bas & le lieu de la plus grande vitesse, l'on aura l'arc total descendu égal à l'arc compris entre le point de la plus grande vitesse, & le point où le mobile cesse de remonter; c'est-à-dire, que le mobile, après qu'il est parvenu à sa plus grande vitesse en descendant, a encore à parcourir jusqu'à ce qu'il cesse de remonter, un chemin égal à celui qu'il a parcouru depuis le commencement de sa descente jusqu'au point le plus bas.

XVII. *Coroll. 3.* Puisque (§. II.) l'arc to-

tal remonté, ou  $b = nl \left( 2c^{\frac{a}{n}} - 1 \right) - a$ , l'on aura la somme de l'arc total descendu & de l'arc total remonté, ou  $a + b = nl$

$\left( 2c^{\frac{a}{n}} - 1 \right)$  & sa moitié  $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} nl$

$\left( 2c^{\frac{a}{n}} - 1 \right)$ ; on voit de-là que le point qui partage en deux également l'arc entier descendu & remonté, est éloigné du point

le plus bas, d'un arc  $= a - \frac{1}{2} nl \left( 2c^{\frac{a}{n}} - 1 \right)$ .

Mais puisque l'arc descendu depuis le commencement jusqu'au point de la plus grande

vitesse est  $= nl \left( 2c^{\frac{a}{n}} - 1 \right) - a$ , la distance de  
ce

ce point au point le plus bas fera  $= a - nl$

$(2c^{\frac{a}{n}} - 1) + a = 2a - nl(2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ ;  
d'où il suit que le point de la plus grande vitesse est deux fois plus éloigné du point le plus bas, que ne l'est de ce même point, le point qui partage en deux également l'arc composé de l'arc descendu & de l'arc remonté.

*Construction géométrique des deux Problèmes précédens.*

XVIII. \* Entre deux Asymptotes  $AB, AC$ , perpendiculaires l'une à l'autre, soit décrite l'Hyperbole équilatère  $G D H$ , telle qu'ayant pris  $AO = n$ , l'Appiquée  $OD$  soit  $= 1$ . Soient prises de l'un & de l'autre côté de  $O$ , les parties égales  $OE, OF$ , & par les points  $E$  &  $F$  soient tirées les Appiquées  $EG, FH$ , parallèles à l'autre Asymptote  $AC$ . Je dis que les Aires  $ODGE$  &  $ODHF$  sont proportionnelles aux Arcs entiers descendus & remontés, c'est-à-dire, si l'on fait  $ODGE = a \times OD$ , l'aire  $ODHF$  sera  $= b \times OD$ .

*Démonstr.* D'un point quelconque  $K$ , soit menée l'appiquée  $KL$ , & soit appelée  $OK$ ,  $z$ ; l'on aura par la nature de l'hyperbole,

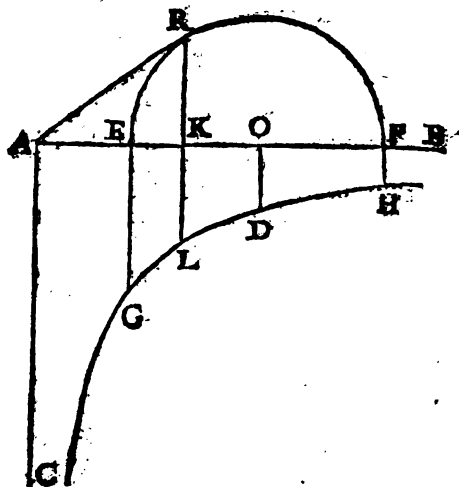
$$KL = \frac{n}{n-z}, \text{ \& partant l'aire } OKLD = \int \frac{n dz}{n-z}$$

$$= nl \left( \frac{n}{n-z} \right), \text{ \& l'aire entiere } OEGD$$

$$= nl \left( \frac{n}{n-OE} \right). \text{ L'on trouve de même}$$

$$OFHD$$

\* Voy. la Figure suivante.



$OFHD = nl \left( \frac{n+OF}{n} \right)$ . Prenant donc l'aire  $OEGD = a \times OD = a \times 1 = a$ , l'on aura  $nl \left( \frac{n}{n-OE} \right) = a$ . De là repassant aux nombres,

l'on aura  $\left( \frac{n}{n-OE} \right)^n = c^a$ , ou  $\frac{n}{n-OE} = c^{\frac{a}{n}}$  ;

soit l'on tire  $OE$  ou  $OF = n - nc^{\frac{a}{n}}$ , qui étant substitué pour  $OF$  dans  $nl \left( \frac{n+OF}{n} \right)$ , l'on

a l'aire  $OFHD = nl \left( \frac{2n - nc^{\frac{a}{n}}}{n} \right) = nl (2 - c^{\frac{a}{n}})$

$$(2 - c^{\frac{a}{n}}) = n! \left( \frac{2c^{\frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{c^{\frac{a}{n}}}} \right) = n! (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$$

— *a*. Or nous avons trouvé dans l'analyse précédente (§. II.) que cette expression étoit celle de *b*; donc l'aire  $OFHD = b = b \times 1 = b \times OD$ .

### LEMME,

Qui sert à déterminer la plus grande vitesse.

XIX. Si du centre *O*, & d'un rayon quelconque *OE*, moindre que *OA*, l'on décrit un demi-cercle *ERF* à la circonférence duquel l'on prolonge l'ordonnée *LK*, le rectangle *LK* × *KR* sera proportionnel à la vitesse qu'aura le mobile, après qu'il sera descendu depuis le commencement d'un arc total exprimé par l'aire *OEGD*, dans l'instant qu'il achève un arc exprimé par l'aire *EGLK*.

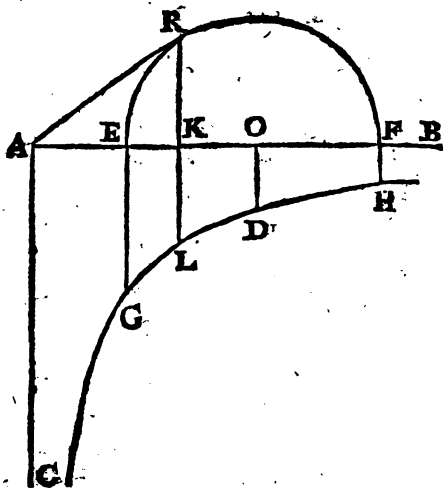
Démonstr. Car ayant pris, comme nous avons fait ci-dessus, l'aire *OEGD*, où l'arc

total = *a*, l'on a trouvé  $OE = n - nc^{\frac{a}{n}}$ .

Si donc l'on fait de la même manière, l'aire *OKLD*, où l'arc qui reste à parcourir = *r*,

l'on aura  $OK = n - nc^{\frac{r}{n}}$ . Et ainsi *KL*

$$= \frac{AO \times OD}{AK} = c^{\frac{r}{n}}, \text{ \& } KR = \sqrt{(OE^2 - OK^2)} =$$



$$\begin{aligned}
 &= n \sqrt{\left( 2c - \frac{r}{n} - 2c - \frac{a}{n} - c - \frac{2r}{n} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2a}{n} \right)}. \text{ Si l'on multiplie } KL \text{ par } KR, \\
 &\text{Pon aura } LK \times KR = nc \sqrt{\left( 2c - \frac{r}{n} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a}{n} - c - \frac{2r}{n} + c - \frac{2a}{n} \right)}, \text{ dont} \\
 &\text{le-quarré} = 2nnc \frac{r}{n} - 2nnc \frac{2r-a}{n} - nn
 \end{aligned}$$

$\frac{2r-2s}{n}$ , divisé par  $nn$ , donne  $2c$

$\frac{2r-s}{n} - 1 + c$ . Mais il est facile de voir que cette quantité est

$$= c^n (1 - c^n)^2 - (1 - 2c^n + c^n),$$

ce que nous avons fait voir dans la Solution précédente (§. 14.) être proportionnel à  $vv$  ou au quarré de la vitesse. Donc  $LK \times KR$  est proportionnel à la simple vitesse.

XX. L'on voit par-là que pour déterminer le lieu de la plus grande vitesse, il n'est question que de tirer entre l'hyperbole & le cercle, la ligne  $LKR$ , enforte que  $LK \times KR$  soit le plus grand de tous les rectangles pareils; ce qui étant fait, l'arc total descendu fera à l'arc compris entre le point le plus bas & le point de la plus grande vitesse, comme l'aire  $EGDO$  à l'aire  $KLDO$ . Or il est évident que le plus grand de tous les rectangles  $LK \times KR$  est celui qui se fait lorsque la soutangente de l'hyperbole pour  $L$  & la soutangente du cercle pour  $R$  sont égales. Mais la soutangente de l'hyperbole est égale à l'abscisse  $AK$  par la nature de l'hyperbole; donc la même  $AK$  doit aussi être la soutangente du cercle pour le point  $R$ . On tire de-là une construction facile & élégante. Du centre de l'hyperbole  $A$ , soit tirée  $AR$  tangente au cercle, & du point d'attouchement  $R$  soit abaissée la perpendiculaire  $RKL$ ; elle partagera l'aire  $EGDO$ , qui représente l'arc

l'arc total, en deux aires  $GEKL$  &  $LKOD$ , en même raison que le point de la plus grande vitesse partage l'arc total.

XXI. *Coroll.* 1. On voit de-là tout d'un coup, sans aucun calcul, pourquoi, lorsque  $n = \infty$ ,  $b$  devient  $= a$ , c'est-à-dire, pourquoi, dans un milieu qui ne résisteroit point, l'arc total remonté doit être égal à l'arc total descendu. Car  $n$  ou  $AO$  étant infini, l'arc hyperbolique  $GDH$  peut passer pour une droite parallèle à l'asymptote  $AB$ , & l'aire  $ODHF = EGD O$ , c'est-à-dire,  $b = a$ . L'on voit aussi que la tangente  $AK$ , tirée d'une distance infinie, peut passer pour parallèle au diamètre du cercle  $EF$ , & que partant  $RL$  passera par le centre  $O$ , & se confondra avec  $OD$ . D'où l'on voit que dans ce cas le lieu de la plus grande vitesse est le point le plus bas, comme il doit arriver dans la Cycloïde, qui est la Tautochrone dans le vuide.

XXII. *Coroll.* 2. Puisque nous avons trouvé ci-dessus (§. 15.) que l'arc descendu, pris depuis le commencement jusqu'au point de la plus grande vitesse, est égal à l'arc total remonté; il suit de-là que l'aire  $EGLK$  est égale à l'aire  $DOFH$ , & qu'ainsi  $AE . AK :: AO . AF$ . Ce qu'on voit d'ailleurs, puisqu'il est évident que la tangente  $AR$  est moyenne proportionnelle tant entre  $AE$  &  $AF$ , qu'entre  $AK$  &  $AO$ , comme il est clair par la nature du cercle.

XXIII. *Scholie.* Voici quelque chose d'utile & de digne de remarque sur notre Courbe tautochrone; c'est de déterminer jusqu'à quelle hauteur elle peut s'élever, ou quel peut être

être le plus grand arc total descendu; car il est certain que cette Courbe, à prendre son commencement au point le plus bas, loin de s'élever à une distance infinie, doit au contraire se terminer, & redescendre ensuite par une espece de pointe ou point de rebroussement, comme on fait qu'il arrive à la Cycloïde elle-même, qui est la Tautochrone dans le cas d'une résistance nulle ou infiniment petite. En effet, si quelque Tautochrone s'étendoit à l'infini, l'on voit assez que le tems de la descente par un arc infiniment long ne pourroit pas être fini & déterminé, contre l'hypothese; car une vîtesse toujours finie dans un tems fini ne sauroit faire parcourir un espace infini. Afin donc que nous trouvions jusqu'où notre Tautochrone doit s'élever, & que nous déterminions le point où commence le plus grand arc possible de descente, ou le point de rebroussement, voici comme je raisonne: Puisque l'on a trouvé ci-dessus (§. 9.)  $dy = dr\sqrt{m^2 - 4nc}$

+  $8nc \frac{r}{m^2} - 4nc \frac{2r}{m^2} : mm$ , l'on voit d'abord qu'au point le plus bas, lorsque  $r=0$ ,  $dy=dr$ ; ce qui fait voir que l'axe est perpendiculaire à la Courbe, comme il doit arriver; autrement ce ne seroit pas le point le plus bas: mais ensuite en s'éloignant de ce point, la raison de  $dy$  à  $dr$  décroît jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui arrive lorsque la Courbe est perpendiculaire à l'appliquée. Je dis maintenant que la Courbe ne s'étend pas au-delà de ce point, & qu'ainsi c'est



c'est le point le plus élevé; car si la Courbe

s'élevoit davantage,  $4nn - 8nc \frac{r}{n} + 4nc \frac{2r}{n}$  feroit plus grand que  $m^4$ , & partant  $dy$  ou

$dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nc \frac{r}{n} - 4nc \frac{2r}{n})}$  seroit imaginaire ou impossible; donc afin que  $dy$  soit  $= 0$ , ce qui termine le plus grand arc,

il faut que  $m^4$  soit  $= 4nn - 8nc \frac{r}{n} + 4nc \frac{2r}{n}$ , ou extrayant la racine, il faut que  $mm$  soit

$= 2nc \frac{r}{n} - 2n$ ; d'où l'on tire  $\frac{mm + 2n}{2n} = c \frac{r}{n}$

& prenant les logarithmes,  $l(\frac{mm + 2n}{2n}) = \frac{r}{n}$ ,

c'est-à-dire,  $r = nl(\frac{mm + 2n}{2n})$  = au plus grand arc possible de descente qui termine la Courbe.

XXIV. Coroll. 1. Nous avons trouvé en général (§. 6.) pour la descente  $mmx dr + 2nr dr = mndx$ ; donc pour le plus grand arc total, lorsque  $dy = 0$ , & qu'ainsi  $dx = dr$ , l'on aura  $mmx + 2nr = mn$ ,

d'où l'on tire  $x = \frac{mn - 2nr}{mm} =$  (substituant

pour  $r$  sa valeur)  $n - \frac{2n^2}{mm} l(\frac{mm - 2n}{2n}) =$

la plus grande abscisse possible.

XXV. Coroll. 2. Si  $m = \infty$ , mais que  $n$  soit

Soit fini, l'on aura  $r$  ou  $n / \left( \frac{m m + 2 n}{2 n} \right) = \infty$  ;

mais  $\frac{2 n n}{m m} / \left( \frac{m m + 2 n}{2 n} \right) = 0$  , donc  $x$  ou la

plus grande abscisse  $= n$  , ce qui convient à la Trajectoire.

XXVI. *Coroll.* 3. Si au contraire  $m$  est fini, mais  $n$  infini, ce qui est le cas de la Tautochrone ordinaire dans le vuide, l'on aura  $r = \infty / 1 = \infty \times 0$  ; ce qui ne donne rien de déterminé ; il faut donc encore se servir ici de la règle de l'Anal. des Infin. petits, art.

163. En considerant  $n / \left( \frac{m m + 2 n}{2 n} \right)$  sous la

forme de cette fraction  $\frac{1 \left( \frac{m m + 2 n}{2 n} \right)}{\frac{1}{n}}$  , dont la

differentielle du numérateur, divisée par la differentielle du dénominateur, donne cette

autre fraction  $\frac{m m n}{m m + 2 n} = (\text{lorsque } n = \infty)$

$\frac{1}{2} m m$ .

XXVII. *Coroll.* 4. Dans ce même cas la plus grande abscisse  $n - \frac{2 n n}{m m} / \left( \frac{m m + 2 n}{2 n} \right)$  de-

vient  $\infty - \frac{2 \infty^2}{m m} / 1 = \infty - \frac{2 \infty^2}{m m} \times 0$  , ce qui

encore ne détermine rien ; il faut donc , afin d'y pouvoir appliquer la règle dont on s'est déjà servi, l'exprimer sous la forme de cette

*Mem.* 1730.

G

frac-

fraction  $\frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{nn}}{\frac{1}{nn}} / \left( \frac{mm + 2n}{2n} \right)$ , & l'on trou-

ve, en opérant bien,  $x = \frac{1}{2} mm$ ; en sorte que le plus grand arc est doublé de la plus grande abscisse, comme il arrive dans la Cycloïde, où le plus grand arc, depuis le point le plus bas, est double du diamètre du Cercle générateur. Ce qui confirme merveilleusement notre méthode.

#### PROBLEME IV.

XXVIII. *La longueur d'un Arc total remonté quelconque étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total descendu qui l'a précédé.*

#### SOLUTION.

On peut se servir ici de la méthode que nous avons employée dans la Solut. du Probl. 2. (§. II.) en prenant les signes inférieurs dans l'expression du carré de la vitesse  $vv$ , & opérant ensuite, comme l'on a fait, avec les changemens nécessaires. Mais on parviendra plus facilement au but, si l'on fait à l'Equation que l'on a trouvée pour la longueur de l'arc remonté (§. II.)  $b = n!$

$(2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ , les changemens nécessaires, afin d'avoir la valeur de  $a$  exprimée par  $b$ ,

ce que je fais ainsi: Puisque  $b = n! (2c^{\frac{a}{n}} - 1) - a$ ,

—  $a$ , l'on aura  $a + b = nl (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$  ou

$\frac{a+b}{n} = l (2c^{\frac{a}{n}} - 1)$ , & passant des logarith.

aux nomb. l'on a  $c^{\frac{a+b}{n}} = 2c^{\frac{a}{n}} - 1$ ; divi-

fant maintenant par  $c^{\frac{a}{n}}$ , il vient  $c^{\frac{b}{n}} = 2$

—  $c^{\frac{a}{n}}$ , & repassant aux logarith. l'on

aura  $\frac{b}{n} = l (2 - c^{\frac{a}{n}})$ , d'où l'on tire

$b = nl (2 - c^{\frac{a}{n}})$ ; & ainsi l'on trouve  $b$  autrement & plus simplement que l'on n'a fait (§. II.). Mais comme c'est ici  $a$  que l'on

cherche, je transpose  $c^{\frac{b}{n}}$  &  $c^{\frac{a}{n}}$  en chan-

geant les signes, & j'aurai  $c^{\frac{a}{n}} = 2 - c^{\frac{b}{n}}$ ,

& prenant les logarith. —  $\frac{a}{n} = l (2 - c^{\frac{b}{n}})$ ,

d'où l'on tire  $a = -nl (2 - c^{\frac{b}{n}})$ , ou, ce

qui revient au même,  $a = nl (1 : 2 - c^{\frac{b}{n}})$ .

XXIX. Puisque  $a = nl \left( 1 + 2c^{\frac{a}{n}} \right)$   
 &  $b = nl \left( 2 - c^{\frac{a}{n}} \right)$ , l'on aura  $a + b = nl$   
 $\left( \frac{2 - c^{\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{a}{n}}} \right)$ ; mais par §. II, l'on a aussi  
 $a + b = nl \left( 2c^{\frac{a}{n}} - 1 \right)$ , donc  $2c^{\frac{a}{n}} - 1$   
 $= \frac{2 - c^{\frac{a}{n}}}{2 - c^{\frac{a}{n}}}$ ; & l'on a, en réduisant,  $2c^{\frac{a}{n}}$   
 $= 2c^{\frac{a+b}{n}} + c^{\frac{b}{n}} + c^{\frac{a}{n}} = 4.$

L'on peut donc trouver, en rétrogradant, par cette Equation exponentielle, quoique fort composée,  $a$  par  $b$ , & réciproquement  $b$  par  $a$ , ce qui seroit peut-être fort difficile à trouver *a priori*.

XXX. *Scholie*. Par ce que nous avons démontré (§. 23.) l'on pourra encore déterminer le plus grand arc possible remonté, comme aussi la plus grande abscisse qui lui convient. Cela se peut par le moyen de l'Equation

trouvée (§. II.)  $b = nl \left( 2c^{\frac{a}{n}} - 1 \right) - a$ , ou de cette autre équivalente dont nous venons de

dé parler,  $b = n! (2 - c^{\frac{1}{n}})$ , substituant dans l'une ou l'autre pour  $a$  ce qu'on a trouvé ci-dessus (§. 23.)  $n! (\frac{m m + 2 n}{2 n})$  pour le plus grand arc descendu; car l'on aura  $b$  ou le plus grand arc remonté (en se servant de la der-

niere formule)  $= n! (2 - c^{\frac{1}{n} (\frac{m m + 2 n}{2 n})})$ ;

mais cette expression étant embarrassée & peu élégante, à cause de l'exposant logarithmique contenu sous un autre signe logarithmique; voici une maniere particuliere de la réduire à une expression logarithmique simple

& ordinaire: je fais  $2 - c^{\frac{1}{n} (\frac{m m + 2 n}{2 n})} = z$ ,

partant  $c^{\frac{1}{n} (\frac{m m + 2 n}{2 n})} = 2 - z$ , & leurs logarith.  $-\frac{1}{n} (\frac{m m + 2 n}{2 n}) = \log(2 - z)$ ; d'où repassant aux nombres, à la maniere ordinaire,

l'en aura  $\frac{2 n}{m m + 2 n} = 2 - z$ ; donc  $z = \frac{2 m m + 2 n}{m m + 2 n}$

&  $2 - c^{\frac{1}{n} (\frac{m m + 2 n}{2 n})} = \frac{2 m m + 2 n}{m m + 2 n}$ , &  $n!$

$(2 - c^{\frac{1}{n} (\frac{m m + 2 n}{2 n})}) = n! (\frac{2 m m + 2 n}{m m + 2 n}) =$  au

plus grand arc total remonté.

XXXI. Coroll. L'on peut par-là trouver la

plus grande longueur de toute la Tautochrone, c'est-à-dire, celle que le mobile peut parcourir pendant une oscillation entière, en descendant & remontant ensuite. Car le plus grand arc total descendu étant  $= n l$  ( $\frac{m m + 2 n}{2 n}$ ), & le plus grand arc total remonté

immédiatement après, étant  $= n l$  ( $\frac{2 m m + 2 n}{m m + 2 n}$ ), leur somme  $n l$  ( $\frac{m m + 2 n}{2 n}$ ) +  $n l$  ( $\frac{2 m m + 2 n}{m m + 2 n}$ ), qui étant réduite, donne  $n l$  ( $\frac{m m + n}{n}$ ), sera

$=$  à la plus grande longueur de la Tautochrone qui puisse être parcourue par le mobile en descendant & remontant consécutivement.

XXXII. Quant à la plus grande abscisse  $x$ , qui répond au plus grand arc remonté; il faut remarquer qu'il n'est plus permis de supposer  $dx = dr$ , comme nous avons fait pour la descente (§. 24.) : car le plus grand arc remonté n'est point absolument le plus grand, mais seulement relativement au plus grand arc descendu, par lequel le mobile parvenant au point le plus bas, remonte ensuite aussi haut que le lui permet la vitesse qu'il avoit acquise au point le plus bas; mais ce n'est pas à dire pour cela que quelque force externe, indépendamment de la force de la chute, imprimant au mobile une plus grande vitesse que celle qu'il acquiert en descendant librement par le plus grand arc de descente, ne pût le faire remonter plus haut, & partant ne pût lui faire décrire un arc plus long. Il faut donc distinguer le cas où le mobile

re-

remonte librement par la seule force qu'il a acquise en descendant, & celui où le mobile remonte, poussé par quelque force étrangère qui agiroit sur lui au point le plus bas de la Tautochrone, quand même il ne seroit point descendu. Ici donc nous entendons le plus grand arc remonté librement, dont nous cherchons l'abscisse  $x$ , ou la plus grande hauteur verticale à laquelle le mobile puisse s'élever, après être descendu par le plus grand arc. Pour cela je prends l'Equation trouvée (§. 6.) avec les signes inférieurs,  $mmx = -2nn$

$+ 2nr + 2nnc - \frac{r^2}{n}$ , dans laquelle, à la place de  $r$ , j'écris le plus grand arc total remonté librement, qui (§. 30.) est  $= n l \left( \frac{2nnn + 2n}{nnn + 2n} \right)$ ; & j'aurai  $mmx = -2nn + 2nn$

$l \left( \frac{2nnn + 2n}{nnn + 2n} \right) + 2nnc - l \left( \frac{2nnn + 2n}{nnn + 2n} \right) =$  (parce que, comme nous avons vu (§. 30.)

$$- l \left( \frac{2nnn + 2n}{nnn + 2n} \right) = \left( \frac{nnn + 2n}{2nnn + 2n} \right) - 2nn + 2nn$$

$l \left( \frac{2nnn + 2n}{nnn + 2n} \right) + \frac{nnnn + 2n^3}{nnn + 2n} =$  (après la réduction)  $2nn l \left( \frac{2nnn + 2n}{nnn + 2n} \right) - \frac{nnnn}{nnn + 2n}$ ; donc

$$x = \frac{2nn}{nnn} l \left( \frac{2nnn + 2n}{nnn + 2n} \right) - \frac{nn}{nnn + 2n}$$

XXXIII. Puisque pour la descente, la plus grande



grande abscisse (§. 24.)  $= n - \frac{2nn}{mm} / \left( \frac{mm+n}{2n} \right)$ ;

si l'on en retranche la plus grande abscisse pour l'ascension libre, le reste sera la quantité, dont la hauteur de laquelle est descendu le corps, surpasse la hauteur à laquelle il est

remonté, & cette difference sera  $= \frac{\frac{mm+n}{2n} - \frac{2nn}{mm}}{\frac{mm+n}{2n}}$   
 $= \frac{2nn}{mm} / \left( \frac{mm+n}{n} \right)$ ; qui s'évanouît, lorsqu'

$n = \infty$ , comme on le trouve par la règle tirée de l'Anal. des Infin. petits; & cela doit être ainsi dans la Tautochrone ordinaire pour le vuide, où le mobile descend & remonte à la même hauteur.

XXXIV. Il nous reste à déterminer aussi le plus grand arc remonté par une force imprimée au mobile au point le plus bas, c'est-à-dire, jusqu'où la Tautochrone s'étend du côté de l'arc remonté, avant que de parvenir au point de rebroussement, si elle en a un, où la Courbe se termine & change sa courbure, comme font les Courbes rebrousantes. Pour cela il nous faut recourir à l'Equation (§. 9.) pour l'arc remonté, qui est

celle-ci,  $dy = dr \sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc - \frac{r^2}{n})}$

$= \frac{2r}{n} ) : mm$ . Afin donc d'avoir le plus grand arc total remonté par une force étrangere, il faut faire  $dy = 0$ , & par conséquent

$m^4 = 4nn - 8nnc - \frac{r^2}{n} - \frac{2r^2}{n}$

$= (2n - 2nc - \frac{r}{n})^2$ ; & extrayant la raci-

ne,  $mm = 2n - 2nc - \frac{r}{n}$ , d'où l'on tire:

$c - \frac{r}{n} = \frac{2n - mm}{2n}$ , & prenant les loga-

rithmes  $-\frac{r}{n} = l\left(\frac{2n - mm}{2n}\right)$ , ce qui don-

ne  $r = -nl\left(\frac{2n - mm}{2n}\right)$ , ou, ce qui est la

même chose,  $r = nl\left(\frac{2n}{2n - mm}\right) =$  au plus

grand arc total remonté par une force étrangère au-delà duquel la Courbe ne s'étend plus.

XXXV. *Coroll. 1.* Si l'on prend  $mm = 2n$ ,

l'on aura  $r = nl\left(\frac{2n}{0}\right) = \infty$ ; dans ce cas

donc l'arc remonté devient infiniment long, d'où l'on voit encore que les Tautochrones se varient selon la valeur du nombre arbitraire  $mm$ .

XXXVI. *Coroll. 2.* Le plus grand arc remonté par une force étrangère, est toujours plus grand que le plus grand arc remonté librement, quel que soit le nombre  $mm$ , ce que je démontre ainsi:  $2n \times (mm + 2n) = 2mmn + 4nn > 2mmn + 4nn - 2m^2 =$

$(2n - mm) \times (2mm + 2n)$ , donc  $\frac{2n}{2n - mm} >$

$\frac{2mm + 2n}{mm + 2n}$ , & partant aussi  $nl\left(\frac{2n}{2n - mm}\right)$  ou

G. 5.

le

le plus grand arc remonté par une force étrangere, est plus grand que  $n l \left( \frac{2nn - 1}{nn - 1} \right)$ , c'est-à-dire, plus grand que le plus grand arc remonté librement. (§. 30.)

XXXVII. Enfin il faut trouver la plus grande abscisse pour l'arc remonté par une force étrangere, c'est-à-dire, celle qui répond au point de rebroussement de l'arc remonté. Pour cela je me sers de l'Equation (§. 6.) dont je me suis déjà servi (§. 32.) pour trouver le plus grand arc remonté librement, savoir  $mmx = -2nn + 2nr$

$-\frac{r^2}{n}$ , & maintenant j'y substitue pour  $r$  le plus grand arc total remonté par une force étrangere, qui est (§. 33.)

$$= nl \left( \frac{2n}{2n - mm} \right), \text{ ce qui me donnera } mmx =$$

$$-2nn + 2nnl \left( \frac{2n}{2n - mm} \right) + 2nnc - l \left( \frac{2n}{2n - mm} \right)$$

$$= \left( -2nn + 2nnl \left( \frac{2n}{2n - mm} \right) \right) \text{ étant } = \frac{2n - mm}{2n} - 2nn$$

$$+ 2nnl \left( \frac{2n}{2n - mm} \right) + 2nn - mmn = 2nnl$$

$$\left( \frac{2n}{2n - mm} \right) - mmn; \text{ d'où l'on tire } x = \frac{2nn}{mm}$$

$$l \left( \frac{2n}{2n - mm} \right) - n = \text{à la plus grande abscisse}$$

pour l'arc remonté par une force étrangere.

XXXVIII. Si  $mm = 2n$ , l'on aura  
 $x =$

$x = n! \left( \frac{2^n}{n} \right) - n = \infty$ ; d'où il suit que le point de rebroussement de l'arc remonté, dans le cas  $m = 2n$ , est infiniment éloigné de l'horizontale tirée par le point le plus bas, c'est-à-dire, que l'abscisse devient infiniment longue. Et afin que le mobile puisse remonter dans la Courbe à cette hauteur infinie, il faut qu'il ait au point le plus bas une vitesse initiale infinie, c'est-à-dire, plus grande qu'aucune vitesse donnée.

### DE L'IMPORTANCE DE L'ANALOGIE,

*Et des rapports que les Arbres doivent avoir entre eux pour la réussite & la durée des Greffes.*

Par M. DU HAMEL. \*

J'EU s occasion l'année dernière, dans un Mémoire qui avoit pour titre, *Recherche sur les Causes de la Multiplication des Especes de Fruits, &c.* d'examiner en passant l'anatomie de la Greffe, ou l'arrangement organique des fibres de plusieurs especes d'Arbres dans l'endroit de l'application de cette Greffe; & j'y reconnus un changement de direction dans les fibres & un entortillement de vaisseaux, qui imitant fort la mécanique de certaines glandes, ou formant un viscere nouveau, peuvent bien être capables de donner

\* 19 Avril 1730.

ner quelques perfections aux Fruits, mais nullement de produire ces changemens prompts, & essentiels que lui attribuent la plupart des Auteurs d'Agriculture.

Cet examen des parties de la Greffe ne m'ayant pas paru suffisant pour détruire un sentiment si généralement adopté, à moins que ces Observations anatomiques ne fussent soutenues par des Expériences exactes & plusieurs fois réitérées; je rapportai plusieurs Greffes que l'on pratique tous les jours sur differens sujets, sans qu'il en arrive de changement dans les especes; comme d'une même espece de Pêche sur Amandier, sur différentes especes de Pruniers & sur Abricotiers; d'une même espece de Piores sur Pommier, sur Coignassier, sur Sauvageon-Poirier, ou sur l'Epine blanche; d'une même espece de Prune sur diverses especes de Pruniers, & sur Pêcher de Noyau, même sur Abricotier & sur Amandier; car quoique ces deux dernières Greffes ne m'aient point donné de fruit; leurs bois & leurs feuilles m'ont fait suffisamment connoître que les especes n'étoient pas changées.

Je promis outre cela de rendre compte à l'Académie du succès d'un nombre d'autres Greffes & d'Ecussions que j'avois fait exécuter conformément aux differens procédés qui se trouvent dans presque tous les Traités d'Agriculture, tels que de greffer le Poirier sur le Chêne, sur le Charme, sur l'Orme, sur l'Erable, sur le Prunier, &c. le Meurier sur l'Orme, sur le Figuier & sur le Coignassier; le Cerisier sur le Laurier-Cerise; le Pêcher

cher sur le Noyer; la Vigne sur le Cerisier & sur le Noyer; & une infinité d'autres Greffes & Écussions de cette nature.

Le peu de succès de ces Greffes n'a pas seulement servi à me persuader que ces Auteurs avoient avancé ces Expériences sans les avoir faites, & seulement sur des vraisemblances; mais outre cela m'a fait faire des réflexions sur un certain rapport & un accord nécessaire qui doivent être entre la Greffe & le sujet, sans lequel, ou elle ne prend point du tout, ou si elle prend, elle ne durera pas longtems. Je crois cependant devoir remarquer que quoique les Greffes que je viens de nommer, ne m'aient pas réussi trois années de suite que je les ai fait exécuter successivement en fente, en écusson, à œil poussant, à œil dormant & par approche; cependant la plupart ne me serviront pas d'exemple dans ce Mémoire, parce que j'entrevois encore quelques espérances de réussite dans des Expériences que je me propose d'exécuter l'année prochaine: je m'attacherai seulement à quelques-unes de ces Greffes que j'ai eu lieu d'examiner de plus près, & d'une manière plus circonstanciée, parce qu'elles m'ont donné occasion de faire plusieurs Remarques & Observations singulières, dont la Physique & l'Agriculture pourront, je crois, tirer quelque avantage.

Les voici en peu de mots, séparées des Expériences qui y ont donné naissance. Je réserve pour un autre lieu le détail de ces Expériences.

Il n'est pas besoin de remarquer qu'il y a

des Greffes qui reprennent avec une facilité surprenante, c'est une chose trop connue.

Mais quelques-unes des Greffes que j'ai appliquées, ont péri sur le champ, & n'ont pas donné la moindre esperance de reprise.

Les autres, après s'être entretenues longtems vertes, ont par la suite également péri; plusieurs ont poussé à la premiere sève, & n'ont pu subsister jusqu'à la seconde.

Quelques-unes se sont soutenues les deux sèves, & n'ont pu passer l'Automne. Il y en a eu qui ont fort bien poussé deux ou trois ans, & ont dans la suite subi le même sort que les précédentes.

Mais ce qui est important à observer, est que quelques-unes ont péri sans que le sujet en souffrît, & que d'autres n'ont paru périr que par la mort du sujet.

Ce qu'il y a encore de singulier, c'est que la plupart des Arbres greffés ne durent pas si longtems que s'ils ne l'étoient pas: je dis la plupart, car j'en ai remarqué quelques-uns qui m'ont paru subsister plus longtems étant greffés que ne l'étant pas. Mais ce secours étant indépendant de l'analogie, comme on le verra dans le détail de cette Expérience, il n'en résulte aucune exception à la règle générale.

Quelquefois même une Greffe appliquée sur un sujet qui ne dure que peu d'années de sa nature, subsistera plus longtems que l'étant sur un autre que l'on regarde comme plus robuste, & qui est d'un naturel à vivre davantage.

Quand on ne feroit aucune attention aux  
utili-

utilités de la Greffe, ces Observations ne découvrent-elles pas une bizarrerie, souvent même une opposition d'évenemens assez singuliers pour exciter la curiosité d'un Physicien, & pour être surpris qu'une pratique, d'ailleurs si belle, si utile & si nécessaire, n'ait été étudiée, & ne le soit encore que de très peu de personnes ?

C'est ce qui m'a fait souhaiter depuis longtemps de connoître la Greffe, mais ce n'est que depuis quelques années que je me suis aperçu de la difficulté qu'il y avoit à y parvenir. Elle peut être pratiquée sur tous les Arbres ; ainsi, pour la connoître parfaitement, il faudroit avoir la connoissance non seulement de tous les Arbres, mais encore de la nature & de l'organisation des parties dont ils sont composés, pour établir les rapports & les contrariétés d'où naissent les succès différens que nous remarquons dans les Greffes.

Nos connoissances sont si bornées sur ce point, qu'il est presque impossible d'en établir des règles certaines.

Aussi mes vues ne font-elles point d'indiquer par l'anatomie des Arbres les Greffes qui pourroient réussir ; mais seulement d'expliquer par le peu de connoissance que nous avons de cette anatomie, les Observations qui résultent d'un nombre d'Expériences que j'ai faites à ce sujet : c'est ce qui m'oblige de faire quelques réflexions sur l'anatomie des Arbres & de la Greffe, avant de passer à l'explication de chaque Observation, à laquelle je joindrai le détail des Expériences qui y ont donné lieu.

Une



Une règle générale pour qu'une Greffe réussisse parfaitement, est qu'il faut qu'elle se joigne si intimement avec le sujet sur lequel on l'applique, qu'elle ne fasse qu'un corps avec lui, & qu'elle devienne comme une de ses branches.

Si les Arbres se ressembloient tous, que leurs liqueurs fussent de même qualité, que la configuration de leurs parties solides & de leurs vaisseaux fût la même, que leurs diamètres fussent égaux, leur élasticité semblable, la quantité de leurs trachées pareille, & ces trachées également remplies d'air, la réussite des Greffes seroit probablement certaine, & la même dans tous les Arbres. Mais cette conformité & ces rapports se trouvent-ils entre eux? c'est ce qu'il faut examiner.

L'on fait, & il est inutile de s'en souvenir, que les Arbres sont composés d'une multitude de fibres creuses; & depuis les Observations de M<sup>rs</sup>. Malpighi & Grew, l'on ne doute plus que chaque Arbre n'ait ses fibres de diamètres inégaux & de figures différentes. Ainsi (comme je l'ai remarqué dans celui de mes Mémoires que j'ai cité) lorsqu'on applique une Greffe, il se doit faire tant aux orifices des fibres de la Greffe que de celles du sujet, des sections plus ou moins considérables suivant la différence des diamètres, & la disproportion de figure qui se rencontre entre les fibres de l'un & de l'autre; & cette disproportion, lorsqu'elle est considérable, est probablement un obstacle à la réussite des Greffes.

Si nous entrevoyons quelques différences  
en-

entre les parties solides des Plantes, nous n'en découvrons pas de moins marquées entre les fluides. Les unes ont leur sève blanche comme du lait, d'autres l'ont rousse, d'autres l'ont claire & limpide, les unes l'ont coulante, les autres l'ont visqueuse. Leurs différences se manifestent encore plus par le goût & à l'odorat, puisqu'il y en a de douces, de suaves, d'agréables, d'aigres, d'amères, d'âcres, de caustiques, de même que quelques-unes sont aromatiques, au-lieu que d'autres sont fétides & puantes.

Ces différences s'étendent presque à l'infini, & suivant qu'elles sont plus ou moins considérables, elles deviennent des causes de la variété du succès des Greffes.

Suivant ce que je viens d'établir, la différente qualité des sèves produit une grande différence entre les Arbres ; mais si nous faisons attention à la quantité de cette sève, elle nous donnera une nouvelle cause de différences qui ne sera pas moins essentielle, puisqu'il y a des Arbres, tels que le Saule, qui dans une année font des poussées si considérables, que d'autres, comme le Buis, pourroient à peine les égaler dans l'espace de douze ou quinze années.

Examinons maintenant, pour ne pas s'arrêter à des particularités inutiles, une autre différence plus sensible, & peut-être plus considérable que les précédentes, qui se rencontre cependant entre plusieurs Arbres : c'est celle de leur Printems, ou plutôt du tems de leur pousse en cette saison : car l'Amandier est en fleur avant que les autres Arbres

bres ayent ouvert leurs boutons; quand les autres Arbres sont en fleurs, il est garni de feuilles, & son fruit est noué avant que le Meurier ait commencé à pousser.

Que de différences entre les Arbres, me dira-t-on? & comment se peut-il faire que malgré ces oppositions, quantité de Greffes reprennent, qu'un Arbre adopte une branche qui lui est si étrangere, pour la nourrir comme la sienne propre, & que cette branche qui change subitement de nourriture, s'en accommode & profite assez souvent mieux que sur son propre tronc?

La question est embarrassante, & j'avouerai qu'il est plus aisé de comprendre comment certains Arbres refusent de s'allier par la Greffe, que d'expliquer la facilité avec laquelle d'autres reprennent. L'Expérience est constante cependant; & si l'on greffe en œil poussant un Poirier, par exemple, sur un autre, ou un Cerisier sur le Merisier, on sera surpris de le voir pousser quelques jours après, acquérir plus de demi-pied de longueur en quinze jours de tems. Je ne chercherai point d'autre explication de cette Expérience, qu'un grand rapport entre les deux Arbres à tous égards, de même qu'une contrariété manifeste entre le Prunier & l'Orme que je donne pour exemple des Greffes qui ne donnent aucune marque de reprise, parce que les ayant greffés plusieurs fois l'un sur l'autre, la Greffe a toujours péri sur le champ.

Dans le nombre d'expériences que j'ai faites, j'ai remarqué une grande quantité de Greffes qui semblent tenir le milieu entre  
les

les deux exemples que je viens de donner, en ce qu'elles ne périssent pas si promptement, car celles qui étoient faites avant l'Automne s'entretenoient vertes tout l'Hiver, comme celles qui ont repris & celles que j'avois fait faire au Printems s'entretenoient vertes un mois & même plus sans aucune apparence de pousser; il y en a même eu entre les unes & les autres qui ont poussé la première sève, même quelquefois la seconde, & qui n'ont pas laissé pour cela de périr. La Greffe du Poirier sur l'Orme, le Charme, l'Erable, celle du Meurier sur l'Orme, le Figuier, & un grand nombre d'autres, peuvent être données pour exemple.

Si l'on recherche les raisons de ces faits dans l'anatomie de ces Greffes, on trouvera par l'examen particulier des sujets, qu'ils n'ont eu avec elles qu'une légère communication par le moyen de quelques fibres qui leur ont fourni assez de nourriture pour les entretenir dans leur verdure, même pour, dans le tems de la grande sève, leur faire produire quelques bourgeons; le reste des fibres, & qui assez souvent sont en plus grand nombre sera noir, desséché, ou plutôt abreuvé, tantôt de gomme, & tantôt d'une sève corrompue, qui est presque comme de la boue, ce qui n'arrive que par la disproportion des vaisseaux, ou par la différente qualité des liqueurs; obstacles évidens à l'union parfaite de toutes les fibres & à l'introduction de la sève, qui n'ayant pu enfler les vaisseaux de la Greffe, a dû nécessairement séjour-

journer & se corrompre dans l'endroit de l'application.

J'ai dit, dans le détail de mes observations, qu'il y avoit des Greffes qui pouſſoient à merveille la premiere année, & donnoient de grandes eſperances de réuſſite, que cependant la ſeconde ou la troiſieme année elles ne manquoient pas de périr.

La Greſſe de l'Amandier ſur le Prunier, & celle du Prunier ſur l'Amandier, m'en ont fourni deux beaux exemples, qui méritent bien d'être examinés chacun en particulier.

J'avois fait écuſſonner à la ſève d'Août des Amandiers ſur des Pruniers de petit Damas noir, ſur la foi de pluſieurs Auteurs, qui aſſurèrent que par ce moyen on retarde la ſève de l'Amandier, ce qui fait qu'il n'eſt pas tant expoſé aux gelées du Printems. Les écuſſons ſe collerent à merveille à leurs ſujets, conſerverent leur verdure pendant tout l'Hiver, pouſſerent avec force au Printems & l'Eté, enſorte qu'en Automne ces Amandiers étoient garnis de feuilles, lorſque les autres en étoient tout dépouillés; on ne peut guere une plus belle eſperance. J'en fis lever quelques-uns de la Pépiniere pour mettre en place; mais ceux que j'avois ainſi transplantés, moururent au Printems, & les autres qui étoient reſtés dans la Pépiniere, continuerent encore à pouſſer paſſablement le reſte de l'année, & au Printems de l'année ſuivante la plupart éprouverent le ſort des premiers. Je dis la plupart, car j'en ai encore deux qui ne ſont pas entierement pérís, mais à peine les Greſſes

ses ont-elles assez de force pour se garnir de feuilles, & les fujets diminuent tous les jours de grosseur, ce qui annonce une mort prochaine.

Des circonstances essentielles à remarquer, c'est que le Prunier, dans l'endroit de la Greffe, paroïssoit appauvri & comme diminué de grosseur; & que l'Amandier y formoit un gros bourlet, effet de la vivacité avec laquelle il avoit poussé.

On ne peut attribuer ce défaut de réussite, ni à la disproportion des fibres de ces deux Arbres, ni à la qualité différente de leur sève; la facilité que cette Greffe a eue à reprendre, & la vivacité avec laquelle elle a poussé, établissent au contraire l'analogie des fujets; de plus, on greffe tous les jours, & avec un égal succès, le Pêcher sur le Prunier & sur l'Amandier, ce qui ne pourroit pas être, si ces deux Arbres étoient d'une nature bien différente.

Pourquoi le Prunier a-t-il donc paru appauvrir, est-ce qu'il n'a pas assez de sève pour nourrir l'Amandier? Il fait cependant dans nos Jardins un Arbre presque aussi grand, cela est vrai, mais il ne le fait pas en aussi peu de tems; les fibres de l'Amandier plus souples que celles du Prunier, peut-être entrelassées d'un plus grand nombre de trachées, remplies d'une sève plus éthérée, plus élastique, sont plus sensibles aux changemens de l'Atmosphère, entrent plus aisément en jeu, & par cette raison poussent de meilleure heure au Printems. En un mot, l'Amandier croît plus vite que le Prunier

Si

Si les branches dépensent donc plus de sève que le tronc n'en peut fournir, elles le sucent nécessairement, elles l'affament, & l'empêchent par-là de prendre de la grosseur.

Il n'est pas surprenant que la Greffe ait si bien poussé la première année, c'est que le Prunier étoit en état de suffire à la nourriture d'une jeune branche; mais si-tôt qu'elle aura pris une certaine grosseur, il faut nécessairement que le sujet périsse.

Nous avons remarqué que ces Arbres périssent plutôt au Printems qu'en toute autre saison, ce qui est une suite nécessaire de ce que nous venons de dire: car l'Amandier, prenant son jeu de ressort au Printems plutôt que le Prunier, il le suce, pour ainsi dire, dans le tems que déjà exténué & encore en repos, il n'étoit pas en état de lui fournir de la sève; ce qui acheve de le faire périr.

Cette cause, qui est plus considérable au Printems qu'en toute autre saison, subsistera cependant toute l'année, si (comme je l'ai prouvé dans un Mémoire que j'ai lu l'année dernière à l'Académie) la condensation & la raréfaction successive de l'air sont les premiers principes du mouvement de la sève.

J'ai remarqué encore, que les Arbres que j'avois fait lever pour mettre en place, étoient morts avant ceux qu'on avoit laissés dans la Pépinière: ce qui vient sans doute de ce qu'un Arbre transplanté n'est jamais si abondant en sève, que celui dont les racines n'ont point changé de situation.

Avant de quitter cette Greffe, il est bon d'observer que j'ai fait cette Expérience sur  
des

des Pruniers en plein vent & dans une terre plus sèche qu'humide, car si l'on n'avoit pas égard à ces circonstances, il pourroit bien arriver de la différence dans la réussite.

Si les Greffes des Amandiers sur Pruniers ont péri, nous allons voir que le Prunier sur l'Amandier a eu le même sort. Une conformité si exacte d'effets engage à admettre aussi de la conformité dans les causes: aussi s'y rencontre-t-elle, & quoique l'une de ces Greffes soit périë d'inanition, & l'autre d'une surabondance de substance, elles se réunissent, comme nous allons le voir, en ce que la disproportion d'élasticité, de souplesse, de ressorts dans les fibres, ou dans les liqueurs, a produit deux effets si contraires.

Le Frere Philippe, habile dans l'art du Jardinage, & qui a la direction des Pépinières des RR. PP. Chartreux, fit greffer en couronne le Prunier sur l'Amandier: les Greffes poussèrent d'abord à merveille, mais ensuite la gomme s'étant mise au-lieu de l'insertion, elle les fit périr.

Cette seule Observation découvre la cause de la perte de ces Greffes: l'Amandier qui pousse plus vite que le Prunier, & qui entre plus aisément en jeu, charrie à la Greffe, qui est encore presque sans action, une grande quantité de sève, & beaucoup plus que la Greffe n'en peut dépenser, ce qui occasionne un dépôt de sève dans l'endroit de l'insertion, l'humidité s'en évapore, cette sève s'y épaisit, & forme la gomme qui successivement obstrue les vaisseaux, ferme les passages



sages aux liqueurs, d'où s'ensuit la secheresse & la perte de la Greffe.

Ainsi après avoir vu, dans la premiere Expérience, l'Amandier, qui demande à son sujet plus de sève qu'il ne lui en peut fournir, périr d'inanition; nous voyons dans cette expérience le Prunier, qui ne dépense pas tant de sève que lui en fournit l'Amandier, périr, pour ainsi dire, de réplétion & d'engorgement.

C'est ici le lieu de rendre raison d'une autre singularité que j'ai remarquée dans le travail que j'ai fait sur la Greffe, puisque sans sortir de ces principes, & par cette même disproportion de sève entre la Greffe & le sujet, on découvre comment certaines Greffes périssent sans que le sujet en pâtisse, pendant que d'autres semblent ne périr que par la mort du sujet.

Dans le premier cas, il ne paroît pas surprenant qu'une Greffe, qui ne trouve point dans un sujet la quantité ou la qualité de sève qui lui convient, périsse; rien n'est plus naturel: l'Arbre sur lequel elle est appliquée, la regarde comme une branche inutile, il ne lui envoie plus de substance, mais il se forme de nouveaux jets auxquels il fournit de la sève en abondance.

Le contraire arrive cependant, & l'on voit des sujets périr en même tems, souvent même avant leurs Greffes, parce qu'ils ne leur fournissent pas assez de sève, & quelquefois parce qu'ils lui en fournissent trop.

Les Greffes de l'Amandier sur le Prunier,  
&

& du Prunier sur l'Amandier, que je viens de donner pour exemples, paroissent seules servir à établir ces deux observations ; j'y ajouterai cependant, pour me servir d'exemples connus de tout le monde, ceux de la Greffe du Poirier sur le Coignassier, & du Pommier sur le Paradis, pratiquées dans une terre sèche & légère ; car quoique dans ces sortes de terres ces dernières Greffes, durent quelque tems, & ne périssent pas si promptement que celles de l'Amandier sur le Prunier, cependant les sujets ne prennent presque point de corps, ne poussent que peu en racines, la Greffe jaunit, & j'ai presque toujours remarqué que la mort est bientôt suivie de celle du sujet.

Nous ne pouvons pas, à la vérité, soupçonner, comme nous avons fait à l'égard de l'Amandier & du Prunier, une grande différence entre l'élasticité des fibres & des liqueurs de ces Arbres, puisqu'ils poussent à peu près d'aussi bonne heure au Printems : mais nous reconnoissons bien clairement que le Poirier dépense plus de sève que le Coignassier ne lui en peut fournir, ce qui arrive aussi aux différentes especes de Pommiers, à l'égard de celui de Paradis, puisque les Greffes formoient un gros bourlet à l'endroit de l'insertion, tandis que les sujets ne prenoient presque point de corps, & que les jeunes branches & les feuilles jaunissoient pendant que les racines ne faisoient aucun progrès.

Mais ce qu'il est bon d'observer encore, est que ces Arbres réussissent fort bien, &

durent assez longtems dans les terres grasses, parce que les sujets sont plus en état de fournir à la Greffe le suc qu'elle demande.

Il est donc constant, par les Expériences que je viens de rapporter, que les sujets qui ne sont pas en état de fournir à la Greffe la sève qu'elle leur demande, périssent faute de substance.

Mais il peut aussi se faire, & il est même probable que cela est, qu'il y aura des sujets qui périront par une abondance de sève peu proportionnée à la capacité des branches, car alors il est nécessaire que la sève surabondante soit, ou reportée aux racines selon le système de la circulation, ou que dans le système opposé elle reste dans les vaisseaux sans mouvement; or dans l'un & dans l'autre cas il est nécessaire que la Greffe en pâtisse, plus à la vérité dans celui-ci, parce que cette stase, ce repos, emporte nécessairement la corruption. Mais dans le système de la circulation, le reflux vers les racines étant considérablement augmenté, on conçoit, sans qu'il soit nécessaire que je l'explique, que l'Arbre en doit beaucoup souffrir; de-là peut-être ces galles, ces gourmes, ces chancres & ces écoulemens de substance qui arrivent quelquefois aux Arbres greffés, mais presque toujours aux Arbres qu'on étête, comme les Ormes, les Peupliers & les Saules, qui ne manquent gueres au bout d'un tems de tomber en pourriture.

Que d'accord, que de convenance il faudroit entre la Greffe & le sujet, pour qu'elle réussit parfaitement. Qu'il est rare de le trou-

trouver, cet accord ! Je ne sai même si en le cherchant avec beaucoup de peine, nous pouvons espérer de le trouver : aussi ne faut-il pas s'étonner s'il y a si peu de Greffes qui réussissent dans cette perfection. Il y en a qui refusent entierement de reprendre, d'autres périssent peu de tems après, mais généralement tous les Arbres greffés ne durent pas, à beaucoup près, si longtems que s'ils ne l'étoient pas.

On ne voit gueres périr de vieillesse un Coignassier, même dans les terres assez sèches : cependant dans ces sortes de terres, lorsqu'on greffe dessus un Poirier, il ne dure pas longtems. Je pourrois dire la même chose du Prunier, lorsqu'on le greffe dessus un Pêcher, ou lorsqu'on le laisse sans être greffé : il n'y a que le Poirier greffé sur son Sauvageon, l'Orme femelle sur l'Orme mâle, & d'autres Greffes pareilles, qui durent ordinairement très longtems. Mais malgré cette raison de convenance entre ces sortes de Greffes & leurs sujets, la durée de celles-là n'égallera jamais celle du Sauvageon-Poirier, ou de l'Orme mâle, lorsqu'ils ne sont point greffés ; cependant j'ai dit qu'il y avoit quelques Arbres qui m'avoient paru durer plus longtems étant greffés, que ne l'étant pas. Lorsque j'aurai rapporté l'Expérience qui a donné lieu à cette observation, on sera en état de juger si ces Greffes ont quelque chose de singulier qui mérite faire une exception de la règle générale.

Il y a bien dix-huit ans que nous avons fait greffer dans une terre grasse & auprès

de terre, des Pruniers de la Reine Claude sur des Pêchers de Noyau: ces Greffes n'ont pas beaucoup poussé en bois, mais elles ont donné de bon fruit, & subsistent encore assez bien à leur maniere, c'est-à-dire, dans leur état languissant, pour esperer qu'elles dureront encore du tems; cependant c'est un fait, que le Pêcher de Noyau ne dure pas si long-tems, & je crois qu'ils seroient pèris, s'ils n'avoient pas été greffés.

Pour comprendre le secours que le Pêcher a pu recevoir du Prunier, il faut savoir que le Pêcher est fort délicat, qu'il pousse avec une vivacité extrême, qu'il produit beaucoup plus de branches qu'il n'en peut nourrir, ce qui fait qu'il est presque toujours plein de bois mort, qu'il perd souvent quelques-unes de ses grosses branches, quelquefois même le tronc meurt, & il repousse quelques foibles jets du pied, ce qui oblige presque toujours à l'arracher, parce que ces sortes de rejets ne sont pas bons à grand' chose; aussi le plante-t-on en espalier à cause de la délicatesse de son bois, qui veut être mis à couvert des injures du tems; c'est aussi dans cette même vue qu'on lui retranche beaucoup de bois par les différentes tailles qu'on lui fait, afin de le mettre plus en état de nourrir les branches qu'on lui laisse.

Ce sont à peu près les mêmes avantages qu'il retire de la Greffe du Prunier: à les branches délicates on en substitue de robustes, & on n'a pas besoin de lui retrancher de son bois, puisque le Prunier ne pousse qu'autant qu'il en peut nourrir; mais le Prunier

nier fait un plus grand Arbre que le Pêcher, c'est aussi pour cela que nos Greffes ont donné si peu de bois, & elles seroient, je crois, périées, si les sujets n'avoient pas été dans une terre très grasse & fertile; de plus, les fibres du Pêcher sont un peu plus souples que celles du Prunier, la sève de celui-là est plus éthérée, plus élastique, & c'est peut-être pour cette raison que nos Arbres sont jaunes & languissans.

Malgré ce que je viens de dire de la Greffe du Prunier sur le Pêcher, je crois qu'on doit regarder comme une règle générale, que les Arbres greffés ne durent pas si longtems que ceux qui ne le sont pas, & que le plus ou le moins de durée qu'on peut remarquer entre les Arbres greffés, dépend du plus ou moins de rapport qui se rencontre entre la Greffe & le sujet.

Enfin j'ai dit avoir remarqué certains Arbres qui duroient plus longtems greffés sur des sujets, qui de leur nature ne durent que peu d'années, que l'étant sur d'autres qui sont plus robustes & durent plus longtems. La Greffe du Pêcher nain sur le Pêcher de Noyau, ou sur Prunier, m'a donné occasion de faire cette observation; car quoique le Prunier vive plus longtems que le Pêcher de Noyau, cependant le Pêcher nain dure plus longtems sur le Pêcher de Noyau que sur le Prunier: ce qui est encore un effet bien sensible de l'analogie dont dépend la réussite des Greffes.

Mais voici encore une Expérience qui découvre bien l'effet de ces rapports: nous la

devons au Frere Philippe, Chartreux, & elle subsiste encore à Moulinot, Maison de Campagne de son Ordre.

On y voit un Poirier, sur lequel on a appliqué une Greffe de Poirier & une de Pommier. Toutes deux portent du fruit, mais la Greffe de Pommier est chétive & petite, au lieu que celle de Poirier, qui se trouve sur son sujet, est forte & vigoureuse. On voit au contraire dans le même endroit un Poirier greffé sur Pommier. Ce Poirier donne du fruit, & est assez beau, quoiqu'il ne soit pas si vigoureux que sur son Sauvageon. J'ai fait exécuter l'une & l'autre Greffe dans mon Jardin, mais ce sont de jeunes Greffes, les Arbres sont petits, & ainsi ne peuvent pas encore nous servir à porter un jugement aussi assuré que ceux de Moulinot, qui sont en plein rapport.

Si cette recherche est utile à la Physique, par le détail où l'on est entré des effets que produisent l'analogie & les rapports qui se trouvent entre les Arbres & les explications que l'on a données de quantité de phénomènes qui appartiennent à la Greffe, l'Agriculture en peut aussi tirer de grands avantages, puisqu'elle peut servir à détromper de quantité de faits rapportés dans les Ouvrages d'Agriculture, & qu'on reconnoitra que la plupart des Greffes qu'on nous y propose ne peuvent réussir, & que celles qui reprennent, ne produisent point les effets qu'on nous en fait espérer, puisque, comme nous l'avons vu, les especes se conservent, quoique greffées sur des sujets de nature bien différente,

com-

comme le Poirier sur l'Epine, & le Prunier sur le Pêcher.

Pour faire encore plus d'usage de cette théorie, pour l'avantage de la pratique, nous pourrions faire sentir, par exemple, qu'il est quelquefois utile que l'analogie ne se trouve pas dans toute sa perfection. Mais cette réflexion & bien d'autres nous meneroient trop loin, pour peu qu'on voulût entrer dans le détail à proportion de leur utilité; ainsi je les réserve pour un autre Mémoire.

## SECONDE PARTIE

### DE L'EXAMEN

### DE LA

## POUSSÉE DES VOÛTES.

Par M. COUPLET.\*

J'AI donné à l'Académie en 1729 la première Partie de l'Examen de la Poussée des Voûtes, dans laquelle, en considérant les Vouloirs comme polis, je déterminois la forme & la poussée des Voûtes, avec l'épaisseur de leurs pied-droits, & la charge que les Cintres de Charpente souffrent dans la construction des Voûtes uniformes.

Dans

\* 15. Mars 1730.

H 4



Dans cette hypothese des Vouffoirs polis, on est obligé de donner aux Voûtes beaucoup d'épaisseur dans leurs reins, pour qu'elles en ayent une suffisante au sommet, & qu'elles ayent la forme qui leur est nécessaire pour que leurs Vouffoirs fassent équilibre entre eux, ce qui fait que les pied-droits doivent avoir une épaisseur considerable.

Comme dans le Coroll. 3. du Théor. 2. de la premiere Partie, j'ai remarqué que les Voûtes se soutiennent sans qu'on leur donne la forme nécessaire à l'équilibre de leurs Vouffoirs, considérés comme polis, j'ai promis de donner une seconde Partie de l'examen des Voûtes, dans laquelle je considererois les Vouffoirs comme grenus, & assez liés ensemble, ou assez adhérens, pour ne point glisser les uns contre les autres.

Deux raisons m'ont engagé à considerer dans la premiere Partie les Vouffoirs comme polis; la premiere, parce que tous ceux qui ont traité de la poussée des Voûtes, les ont regardé comme tels: & la seconde, pour faire voir la différence qu'il y a entre la poussée des Voûtes dont on regarde les Vouffoirs comme polis, & la poussée de celles dont on regarde les Vouffoirs comme grenus, & assez adhérens, ou liés ensemble, pour ne pouvoir point glisser les uns sur les autres.

Quand je dis que je considere les Vouffoirs comme assez liés pour ne pouvoir point glisser l'un sur l'autre, je ne prétends pas pour cela les considerer dans la Voûte comme ne faisant tous ensemble qu'une seule piece, ou un seul corps: j'entends seulement,

ment, par cette liaison, que les faces des Voussloirs qui se toucheront, seront assez embarrassées par l'engrenement de leurs parties, pour ne point glisser les unes contre les autres, & que cette liaison ne s'opposera point à l'écartement des Voussloirs dans la rupture de la Voûte, en sorte que ces Voussloirs pourront être écartés l'un de l'autre par toutes forces où il n'y aura point de frottement de leurs faces l'une contre l'autre.

C'est suivant cette nouvelle hypothèse que j'ai résolu les Problèmes qui composent cette suite, ou seconde Partie de la Poussée des Voûtes.

Dans le premier Problème & ses Corollaires, je détermine la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à une Voûte circulaire de  $180^{\circ}$ .

Dans le second Problème je détermine la plus petite épaisseur uniforme d'une Voûte circulaire de  $120^{\circ}$ .

Dans le troisième Problème je détermine la poussée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados sont circulaires.

Dans le quatrième Problème je détermine la base du pied-droit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de sa poussée horizontale & de la pesanteur dudit pied-droit, soit dirigé vers un point donné quelconque de ladite base.

Enfin les formules que j'ai déduites dans la Solution de ces Problèmes, & les moyens dont je me suis servi pour les résoudre, pourront facilement être employés pour déterminer les moindres épaisseurs que l'on

puisse donner à une Voûte circulaire & uniforme pour un Arc circulaire quelconque ; comme aussi pour déterminer les épaisseurs nécessaires aux pied-droits, suivant leur hauteur quelconque, pour résister à la poussée des Voûtes dont ils seroient chargés.

### T H E O R E M E.

*Si l'on suppose que les Voussoirs ne puissent point glisser les uns contre les autres, la Voûte ne cassera point, si la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados, mais qu'elle se trouve dans l'épaisseur de la Voûte.*

### D E M O N S T R A T I O N.

\* Soit une Voûte  $BMANC$ , si la corde  $AB$  de sa moitié  $BMA$  ne coupe point l'intrados  $IKL$  ; je dis que la Voûte ne cassera point : car quelle que soit la charge du sommet  $A$  de cette Voûte, elle se communiquera directement & sans interruption au Couffinet  $B$ , suivant la ligne droite  $AFB$  qui se trouve dans l'épaisseur de la Voûte.

Car pour que la Voûte s'écrasât, il faudroit que l'angle  $BAC$  s'ouvrît, & par conséquent que les Couffinets  $B$  &  $C$  s'écartassent ; ce qui ne peut point être, puisque nous les regardons comme des obstacles invincibles.

Donc la Voûte ne cassera point, si la corde de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados. *Ce qu'il falloit démontrer.*

R E.

## REMARQUE.

Si la corde  $AB$  de la demi-Voute coupoit l'intrados  $ODEP$ , il arriveroit que si le sommet  $A$  étoit trop chargé, l'angle  $DAE$  pourroit s'ouvrir, & par conséquent les angles  $ADB$ ,  $AEC$ , pourroient se fermer, si les parties  $BMDQ$ ,  $CNEP$ , de la Voute n'étoient pas suffisantes pour résister à l'ouverture qu'elles seroient forcées de faire.

Mais si l'on remplit de Maçonnerie la partie  $AMBQ$ , suivant la ligne horizontale  $AQ$ , cette charge, toute grande qu'elle est, qui fait perdre entièrement l'équilibre qui étoit observé précédemment dans tous les Voulfoirs, n'occasionnera cependant point la rupture de la Voute, puisque nous avons supposé que la Clef  $A$  ne peut point glisser; & aussi ces constructions se pratiquent-elles dans les Salons voûtés, ou Berceaux de Terrasses, avec tout le succès que l'on peut désirer.

Lorsqu'on ne remplit point les reins de la Voute, ce qui arrive dans les Edifices publics très exhaussés, comme les Eglises, où l'on craint que la poussée ne soit trop grande contre les pied-droits, la partie supérieure de la Voute tend toujours à baisser plutôt que les parties les plus proches des Couffins, ce qui fait souvent rompre la Voute.

Or l'on voit que ces Voutes rompues, dont on n'a que trop d'exemples, manquent toujours à peu près à distances égales du Couffinet & du sommet; d'où l'on peut conclure:

que cet endroit est le plus foible de la Voûte.

Il faut donc, suivant cette remarque, donner à la Voûte une épaisseur telle que cet endroit par lequel la Voûte manque presque toujours, ait une force suffisante pour se soutenir, & empêcher la Voûte de changer de courbure: c'est pourquoi nous allons chercher dans le Problème suivant quelle est l'épaisseur qu'il faut donner à cet endroit le plus foible, je veux dire à l'endroit également distant du Couffinet & du sommet, pour que la Voûte se soutienne dans sa première courbure, autant qu'il est possible qu'elle s'y soutienne; je dis autant qu'il est possible, car il est constant que quand on décintre une Voûte ou une Plâtrée, elle se surbaïsse de plusieurs pouces, sans que pour cela les Voussoirs ou Clavaux glissent les uns sur les autres, parce que pour-lors ils ne font que se ferrer plus étroitement sur leurs joints.

### PROBLEME I.

*Trouver la moindre épaisseur que l'on puisse donner à une Voûte circulaire de  $180^\circ$ , c'est-à-dire, d'un demi Cercle entier, dont on suppose l'épaisseur uniforme.*

### SOLUTION.

\* Soit une Voûte circulaire  $RAF$ , dont l'intrados  $SBE$  & l'extrados  $RAF$  soient des

\* Fig. 2.

demi-Cercles concentriques : il s'agit de déterminer la moindre épaisseur  $AB$  qu'on lui puisse donner.

Pour cela je suppose que la Voûte est composée de quatre Voussoirs égaux, attachés ensemble, comme par des charnières, aux points  $A, T, K$ , & aux Coussinets par les charnières  $F, R$ .

Cela posé, il est évident que les Voussoirs  $AK, AT$ , feront effort par leur pesanteur pour s'ouvrir sur la charnière  $A$ , & pour se fermer sur les charnières  $K, T$ , & par conséquent pour écarter les Voussoirs  $KF, TR$ , en les faisant tourner sur les charnières  $F, R$ , par lesquelles ils tiennent aux Coussinets; & que les Voussoirs  $KF, TR$ , feront par leur poids effort pour tourner à contre-sens sur les mêmes charnières  $F, R$ , & par conséquent pour résister aux Voussoirs  $AK, AT$ , qui font effort pour les renverser. Voyons maintenant quels sont ces efforts.

Le Voussoir  $AK$ , dont la pesanteur est réunie à son centre de gravité  $H$ , laquelle j'exprime par la diagonale  $GI$ , du parallélogramme  $OK$ , fera en même tems deux efforts; l'un exprimé par  $GO$ , pour résister à la poussée du Voussoir  $AT$ , qui fait un effort semblable, & l'autre exprimé par  $GK$ , pour pousser contre le Voussoir  $KF$ . Mais cet effort  $GK$  se décompose aussi en deux autres efforts, dont l'un est horizontal, exprimé par  $IK$ , & l'autre vertical, exprimé par  $XK$ , en sorte que ces deux efforts font des effets opposés, puisque l'effort horizontal  $IK$  tend à renverser le Voussoir  $KF$ , en le

faisant tourner sur la charniere  $F$ , & que l'effort vertical  $XK$  tend à affermir ce même Vouffoir  $KF$ , en le faisant tourner à contre-sens sur la même charniere  $F$ : ainsi l'excès de l'énergie de l'effort horizontal  $IK$ , sur l'énergie de l'effort vertical  $XK$ , fera l'énergie qui reste au Vouffoir  $AK$ , pour renverser le Vouffoir  $KF$  sur la charniere  $F$ .

Il faut donc faire l'épaisseur de la Voûte telle que cet excès soit égal à l'énergie que le Vouffoir  $KF$  a pour tourner du côté du centre de la Voûte, puisqu'il faut que le Vouffoir  $KF$  résiste à la poussée du Vouffoir  $AK$ .

Pour cela soit l'épaisseur  $AB$  de la Voûte. . . . .  $=x$ .

Le rayon  $BC$  de l'intrados  $= KC$   
 $= CE$ . . . . .  $=r$ .

Le rayon  $AC$  de l'extrados fera . . .  $=r+x$ .

Soit l'arc  $BK$ , ou son égal  $KE$ . . .  $=a$ .

Soit  $BZ$ , ou son égal  $LE$ . . . .  $=d$ .

L'on aura  $CZ$  ou son égal  $CL=ZK$ . . .  $=r-d$ .

Du centre de gravité  $H$  du Vouffoir  $AK$ , soit tiré  $HD$  perpendiculairement sur  $AC$ , & du centre de gravité  $P$  de l'autre Vouffoir  $FK$  soit tiré  $PQ$ , perpendiculaire sur  $CF$ : pour-lors, puisque les Vouffoirs sont égaux,

L'on aura  $CD=CQ$ , & par la propriété des centres de gravité, l'on aura  $HD$ , ou

$$\text{son égal } ZI = \frac{6dr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}.$$

Mais pour faciliter le calcul, soit fait  $HD$ , ou  $ZI = z$ : puisque  $CZ = ZK$ , & que le triangle  $CZK$  est rectangle:

L'on

L'on aura  $CZ$ , ou  $ZK = \sqrt{\frac{CK^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}}$ ; ou plutôt, comme nous avons fait  $BZ = d$ , nous aurons  $CZ$ , ou son égal  $ZK = r - d$ .

Et par conséquent  $IK = ZK - ZI = r - d - z$ .

Et l'on aura  $GI$ , ou  $XK = AZ = x + d$ .

Mais l'effort horizontal  $IK = r - d - z$  du Vouffoir  $AK$  est appliqué au bras de levier  $MF = CZ = r - d$ , ainsi l'énergie de cet effort horizontal  $IK$ , pour faire tourner le Vouffoir  $KF$  sur la charnière  $F$ , est  $= rr - 2rd + dd + dz - rz$ .

Et en la place de  $rr - 2rd + dd$ , qui est le carré de  $r - d = ZK$ , si l'on met  $\frac{rr}{2}$ , qui est aussi le carré de  $ZK$ , puisque nous avons trouvé ci-dessus  $ZK = \sqrt{\frac{rr}{2}}$ ; l'on aura l'énergie de la force horizontale  $IK = \frac{rr}{2} + dz - rz$ .

Et la force verticale  $XK = d + x$  est appliquée au bras de levier  $LF = d + x$ , ainsi son énergie, pour affermir le Vouffoir  $KF$ , est  $= dd + 2dx + xx$ .

Et si l'on retranche, comme nous avons dit ci-devant, l'énergie verticale  $dd + 2dx + xx$  du Vouffoir  $AK$ , de son énergie horizontale  $\frac{rr}{2} + dz - rz$ , le reste  $\frac{rr}{2} + dz - rz - dd - 2dx - xx$  fera l'énergie qui reste au Vouffoir  $AK$ , pour renverser le Vouffoir  $KF$  autour de la charnière  $F$ .

Voyons



Voyons maintenant quelle est l'énergie du Vouffoir  $KF$  pour résister.

Puisque le Vouffoir  $KF$  est égal au Vouffoir  $AK$ , sa pesanteur sera comme celle du Vouffoir  $AK = d + x$ .

Mais cette pesanteur  $d + x$  étant réunie au centre de gravité  $P$ , est appliquée au bras de levier  $QF = AD$ , ainsi son énergie sera  $= d + x \times AD$ .

Maintenant pour trouver le levier  $QF = AD$ , il faut considérer que  $CH$  divisant l'angle  $ACK$  ou  $ZGK$  en deux parties égales, l'on aura . . . . .  $CK : CZ :: KV : VZ$ . Et componendo . . .  $CK + CZ : CZ :: KV + VZ : VZ$ . C'est-à-dire . . . .  $2r - d : r - d :: r - d : VZ$ .

$$\text{Donc } VZ = \frac{r-d \times r-d}{2r-d}$$

$$\text{Mais } VZ : CZ :: HD : CD$$

$$\text{C'est-à-dire, } \frac{r-d \times r-d}{2r-d} : r-d :: z : CD$$

$$= \frac{2rz - dz}{r-d}$$

Mais  $AD$  ou le levier  $QF = AC - CD$

$$= r + x - \frac{2rz + dz}{r-d}$$

Donc l'énergie  $d + x \times AD$ , que nous avons trouvée pour le Vouffoir  $KF$ , est

$$d + x \times r + x + d + x \times - \frac{2rz + dz}{r-d}, \text{ c'est-}$$

$$\text{à-dire, } dr + dx + xr + xx - \frac{2drz + ddz + 2rxz + dxx}{r-d}, \text{ laquelle énergie}$$

du

du Vouffoir  $K F$  doit être égale à l'énergie  $\frac{r^2}{2} + dx - rz - dd - 2dx - xx$  qui reste au Vouffoir  $AK$  pour le renverser sur la charniere  $F$ , ce qui donne Main-  
cette Equation,  $dr + dx + xr + xx - \frac{2drx + ddx - 2rx + dx}{r - d} = \frac{r^2}{2}$   
 $+ dz - rz - dd - 2dx - xx (A).$

Comme nous avons trouvé  $\frac{r^2}{2} = rr - 2dr + dd.$

L'on aura  $\frac{r}{2} = r - d.$

Et par conséquent l'on aura  $d = r - \frac{r}{2}.$

Mettant  $\frac{6dr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$  en la place de  $z$  :

Et  $r - \frac{r}{2}$  en la place de  $d$  dans l'Equation (A) :

Elle se changera en cette Equation ordonnée

$$\left\{ \begin{array}{l} -3r^2 \\ -\frac{2}{3}ar \\ +12ar^2 \end{array} \right\} + xx \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3r^2}{2} \\ -\frac{2}{3}ar \\ +15ar^2 \end{array} \right\} - 9ar^2 = 0,$$

# 178 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

Maintenant si l'on fait le rayon  $BC$  sur de la Voûte . . . . . = 14.

Et que l'on multiplie ce rayon par  $3\frac{1}{2}$ , qui est à peu près le nombre de fois que la circonférence contient son diamètre, l'on aura la demi-circonférence . . . = 44.

Et l'arc  $BK$  ou  $a$ , qui est  $\frac{1}{4}$  de la demi-circonférence, fera . . . . . = 11.

Et  $\sqrt{2}$  étant  $= 1\frac{41421}{100000}$ , l'Equation se changera en celle-ci,  $x^2 + 40.787xx + 257.09x - 475.587$  . . . . . = 0.

Mettant  $y = \frac{40.787}{3}$  en la place de  $x$ , l'on aura cette Equation, qui n'aura point de second terme,

$$y^3 - 297.473y + 1043.38018 = 0.$$

Or comme  $\frac{297.473}{27} > \frac{1043.38018}{4}$ , & que le

troisième terme est négatif, il s'ensuit que cette Equation est irréductible, & l'on trouvera par approximation la valeur positive de  $x$ , qui est celle que nous cherchons, entre 1.4866 & 1.4865, qui est la plus petite épaisseur d'une Voûte uniforme en plein Centre, c'est-à-dire, en demi-cercle, dont le diamètre porteroit sur les Coussinets, & seroit, comme nous l'avons supposé, de 28 pieds dans l'intrados.

## COROLLAIRE.

\* Si l'on vouloit que l'effort  $GK$  du Vouffoir  $AK$  fût dirigé vers la charniere  $F$  sur le Couffinet, pour-lors la pesanteur du Vouffoir  $AK$  ne pourroit jamais renverser le Vouffoir  $KF$ , parce que ce Vouffoir  $KF$  trouveroit sur la charniere  $F$  un obstacle invincible.

Et dans ce cas l'épaisseur de la Voûte seroit telle, que l'on auroit cette proportion  $GI:IK::KL:LF$ , puisque l'on suppose que la direction  $GK$  passe par le point  $F$ , & que les triangles  $GIK$ ,  $KLF$ , sont semblables.

Mais dans le Problème précédent nous avons trouvé  $GI = d + x$  aussi-bien que  $LF$ , & nous avons trouvé  $IK = r - d - z$  &  $KL = r - d$ .

L'on aura donc cette proportion  $d + x : r - d - z :: r - d : d + x$ . Donc  $dd + 2dx + xx = rr - 2dr + dd - rz + dz$ .

Mettant en la place de  $z$  sa valeur, que nous avons trouvée, Problème précédent,

$$= \frac{6dr + 6dx + 2dx}{6ar + 3ax}, \text{ \& mettant aussi en}$$

la place de  $d$  sa valeur, que nous avons aussi

trouvée dans le même Problème  $= r - \frac{r}{\sqrt{2}}$ ,

l'on aura, en ordonnant l'Equation,

$$x^3 + 2x^2 \times \left\{ \begin{array}{l} 12x^2 \\ -1x^2 \\ -3ax^2 \\ +3x^2 \end{array} \right\} + x^2 \times \left\{ \begin{array}{l} 15ax^2 \\ -3x^2 \\ -9ax^2 \\ +3x^2 \end{array} \right\} - 3x^4 \\ + 6ax^3 \\ - 6ax^3 \\ + 3x^4 \\ = 0.$$

Mettant, comme dans le Problème précédent, 11, 14, 1.  $\frac{1644}{1000}$  en la place de  $a$ ,  $r$ ,  $\frac{1}{2}$ , l'on aura  $x^3 + x^2 \times 38.061 + x \times 251.771 - 826.0125 = 0$ . Et l'on trouvera, par approximation, la valeur positive de  $x$  entre 2.3678 & 2.3688 pour la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à la Voûte de 28 pieds de diamètre, afin que l'effort  $GK$  de la moitié  $AK$  de la demi-Voûte soit dirigé vers la charnière  $F$  du Couffinet.

# PROBLEME II.

Determiner la plus petite épaisseur uniforme  $AB$  d'une Voûte  $RAF$  de  $120^\circ$ .

## SOLUTION.

Soit, comme dans le Problème précédent, la Voûte (Fig. 3.)  $RAF$ , divisée

en quatre Vouffloirs égaux attachés ensemble par trois charnières  $T, A, K$ , & aux Couffinets par deux charnières  $R, F$ .

Cela posé, soient les arcs de l'intrados  $BK, KE$ , &c. ....  $= a$ .

Soit le rayon  $BC$  de l'intrados  $= r$ .

L'épaisseur  $AB$  de la Voûte. ....  $= x$ .

L'on aura le rayon  $AC$  de l'extrados. ....  $= r + x$ .

L'on aura  $ZK$ , ou son égal

$EV$ , qui est le sinus de  $30^\circ$ . ....  $= \frac{r}{2}$ .

L'on aura  $ZC$  ....  $= \sqrt{\frac{3rr}{4}}$ .

Et l'on aura  $BZ$  ....  $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$ .

Ou, si l'on veut, soit, comme dans le Problème précédent,  $BZ$ . ....  $= d$ .

L'on aura  $AZ = d + x = BZ + AB = r - \sqrt{\frac{3rr}{4}} + x$ .

Soit  $H$  le centre de gravité du Vouffloir  $AK$ , l'on aura par la propriété des centres de

gravité,  $HD$ , ou  $AG$ , ou  $ZI = \frac{6dr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$ ,

comme dans le Problème précédent. Et

par conséquent  $IK = ZK - ZI = \frac{r}{2}$

$= \frac{6dr + 6drx + 2dxx}{6ar + 3ax}$ .

Mais la pesanteur du Vouffloir  $AK$ , étant réu-

réunie à son centre de gravité  $H$ , & agissant verticalement suivant la diagonale  $GI$  du parallélogramme  $TK$ , se décompose en deux autres forces, dont l'une agit suivant le côté  $GT$  du parallélogramme  $TK$ , & l'autre suivant le côté  $GK$  du même parallélogr. en sorte que si l'on exprime la pesanteur du Vouffoir  $AK$  par la diagonale  $GI = d + x$ , l'effort que ce Vouffoir fera suivant  $GK$  contre le Vouffoir  $KF$ , sera exprimé par  $GK$ .

Mais cet effort exprimé par  $GK$ , que le Vouffoir  $AK$  fait contre le Vouffoir  $KF$ , se décompose en deux forces suivant l'horizontale  $IK$ ,

exprimé par  $IK = \frac{r}{2} - \frac{6dr - 6rx - 2dx}{6ar + 3ax}$ ,

& l'autre suivant la verticale  $XK$ , exprimé par  $XK$ , ou par la pesanteur  $GI$  du Vouffoir  $= x + d$ .

Ainsi le Vouffoir  $AK$  fait contre le Vouffoir  $KF$  deux efforts contraires, c'est-à-dire, l'un horizontal  $IK$ , pour le renverser sur la charniere  $F$ , & l'autre  $XK$ , pour l'affermir.

Donc l'excès de l'énergie de l'effort horizontal  $IK$  sur l'énergie de l'effort vertical  $XK$ , sera l'énergie qui reste au Vouffoir  $AK$ , pour renverser le Vouffoir  $KF$ , en le faisant tourner sur la charniere  $F$ .

Ainsi il faut faire l'épaisseur  $x$  de la Voûte telle que cet excès d'énergie soit égal à l'énergie que le Vouffoir  $KF$  a pour tourner vers le centre de la Voûte, ou pour résister au Vouffoir  $AK$ .

Si l'on multiplie l'effort horizontal  $IK = \frac{r}{2}$

$\frac{6dr - 6dx - 2dx}{6ar + 3ax}$  par son bras de levier

$MP = MN - FN = \sqrt{\frac{3r}{4}} - \frac{r-x}{2}$  (parce que  $FN$  étant le sinus de  $30^\circ$ , vaut la moitié du rayon  $FC = r + x$ ).

Le produit  $\frac{rx}{4} \sqrt{3} - \frac{3dr^2}{6ar + 3ax} - \frac{3drx}{6ar + 3ax} - \frac{dx^2}{6ar + 3ax}$   
 $= \frac{rx}{4} + \frac{3dr^2 + 3drx + dx^2}{6ar + 3ax} = \frac{rx}{4}$   
 $+ \frac{3drx + 3drx + dx^2}{6ar + 3ax}$  fera l'énergie ho-

rizontale du Vouffoir  $AK$ .

Maintenant si l'on multiplie l'effort vertical  $XK = x + d$  par son bras de levier  $LF = F - \rho L$ , l'on aura l'énergie de l'effort vertical.

Mais  $F$ , étant le sinus de  $60^\circ$ , est égal  $\sqrt{\frac{3}{4}CF^2}$ , c'est-à-dire,  $\frac{CF}{2} \sqrt{3} = \frac{r+x}{2} \sqrt{3}$ , & nous avons trouvé,  $L = ZK = \frac{r}{2}$ . Donc le levier  $LF = F - \rho L = \frac{r+x}{2} \sqrt{3} - \frac{r}{2}$ .

Multipliant, comme nous avons dit, ce levier par l'effort vertical  $XK = x + d$ , le

produit  $\frac{rx\sqrt{3}}{2} + \frac{xx\sqrt{3}}{2} + \frac{dr\sqrt{3}}{2} + \frac{dx\sqrt{3}}{2}$   
 $= \frac{rx}{2} - \frac{dr}{2}$  fera l'énergie de l'effort vertical.

Et si l'on retranche cette énergie verticale de



de l'énergie horizontale que nous avons trouvée, le reste

$$- \frac{3dr^3V_3 - 3drxxV_3 - drxxV_3 + 3dr^3 + 3drxx + drxx}{6ar + 3ax} + \frac{3drxx + 3drxx + dx^3}{6ar + 3ax} N$$

$$+ \frac{rrV_3 - rr - rx}{4} + \frac{rxV_3 - xxV_3 - drV_3 - dxV_3 + rx + dr}{2} \text{ fera l'énergie}$$

qui reste au Vouffoir  $AK$ , pour renverser le Vouffoir  $KF$  sur la charniere  $F$  de son Couffinet, lequel reste étant abrégé, devient

$$- \frac{3dr^3V_3 - 3drxxV_3 - drxxV_3 + 3dr^3 + 6drxx + 4drxx + dx^3}{6ar + 3ax}$$

$$+ \frac{rrV_3 - rr + rx - 2rxV_3 - 2xxV_3 - 2drV_3 - 2dxV_3 + 2dr}{4}$$

Lequel reste doit être égal à l'énergie du Vouffoir  $KF$ , que nous allons chercher.

Comme le Vouffoir  $KF$  est égal au Vouffoir  $AK$ , sa pesanteur sera comme celle du Vouffoir  $AK = d + x$ .

Mais cette pesanteur étant réunie au centre de gravité  $P$  du Vouffoir  $KF$ , et appliquée au bras de levier  $QF$ , qu'il faut trouver.

Nous avons. . . . .  $OF = F_c - O_c$ .

Mais nous avons trouvé. . . . .  $F_c = \frac{r+x}{2} \sqrt{3}$ .

Il ne s'agit donc plus que de trou-

ver. . . . .  $O_c$ .

Pour cela il faut considérer que  $KS$  est la différence du sinus de  $60^\circ$  au sinus de  $30^\circ$ , puisque  $KS = ZC - EV$ , c'est-à-dire,

$$= \sqrt{\frac{3rr}{4}} - \frac{r}{2}.$$

Mais pour abréger, soit fait  $KS = b$ , l'on aura, par la propriété du centre de gravité,

$$Px, \text{ ou son égal } O_c = \frac{6brr + 6brx + 2bxx}{6ar + 3ax}.$$

Donc le levier  $OF = F_c - O_c = \frac{r+x}{2} \sqrt{3}$

$$= \frac{6brr - 6brx - 2bxx}{6ar + 3ax}.$$

Et multipliant ce levier par la pesanteur  $d+x$  du Vouffoir  $KF$ , le produit

$$\frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6bdr - 6bdrx - 2bdxx - 6brxx - 6brxx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$$

fera l'énergie du Vouffoir  $KF$ , laquelle énergie doit être égale à l'énergie qui reste au Vouffoir  $AK$ , pour renverser le Vouffoir  $KF$ , ce qui donne cette Equa-

$$\text{tion } \frac{dr\sqrt{3} + dx\sqrt{3} + rx\sqrt{3} + xx\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6bdr - 6bdrx - 2bdxx - 6brxx - 6brxx - 2bx^3}{6ar + 3ax}$$

Mém. 1750.

I

=

$$N = \frac{m^2 d^2 \sqrt{3} - 3 d r x \sqrt{3} - d r x x \sqrt{3} + 3 d^2 + 6 d r x + 4 d r x x + d x^2}{6 a r + 3 a x} + \frac{r^2 \sqrt{3} - r r + r x - 2 r x \sqrt{3} - 2 x x \sqrt{3} - 2 d r \sqrt{3} - 4 d x \sqrt{3} + 2 d x}{4}$$

R.

Mettant  $r = \sqrt{\frac{3x}{4}}$  en la place de  $d$ , &  $\sqrt{\frac{3x}{4}} = \frac{x}{2}$  en la place de  $b$ . Et ordonnant l'Equation, l'on aura

$$x^3 + x x x \left\{ \frac{24 a r \sqrt{3}}{4} - \frac{3 r r \sqrt{3}}{2} \right\} + x x x \left\{ \frac{30 a r r^2 \sqrt{3}}{63} - \frac{3 x^2 \sqrt{3}}{21 a r} \right\} + 12 a r^3 \sqrt{3} - 6 a \sqrt{3} - x \sqrt{3} = 0.$$

Maintenant si l'on fait  $r = 14$ ,  $a$  étant un arc de  $90^\circ$  fera  $= 7 \frac{1}{2}$ , & substituant

$$14 \text{ \& } 7 \frac{1}{2} \text{ en la place de } r \text{ \& } a, \text{ dans cette Equation, l'on aura}$$

$x^3 + 40.227 x x + 291.5959 x - 83.416 = 0$ .  
D'où l'on tirera par approximation la valeur positive de  $x$  entr 0.276 & 0.275, qui est la moindre épaisseur uniforme que l'on puisse donner à une Voûte de 120 degrés. Ce qui donne  $x$  approché à  $\frac{1}{1000}$  près.

## REMARQUE.

Nous avons trouvé dans le Problème 1<sup>er</sup>, qu'une Voûte en plein Cintre, d'une épaisseur uniforme de 14 pieds de rayon, ou de 28 pieds de diamètre, devoit avoir son épaisseur entre 1. 4866 & 1. 4865, pour être en équilibre & conserver sa figure.

Nous avons aussi trouvé dans le Problème 2, qu'une Voûte circulaire de 120°, d'une épaisseur uniforme, & de 14 pieds de rayon, devoit avoir une épaisseur entre 0. 276 & 0. 275, pour se soutenir en équilibre & ne point changer de figure.

Si l'on veut comparer l'épaisseur de la Voûte en plein Cintre avec la Voûte de 120°, il faut réduire ces Voûtes à une même largeur, comme, pour exemple, à une même largeur de 28 pieds.

La Voûte en plein Cintre ayant, dans l'hypothèse du Problème 1<sup>er</sup>, 28 pieds de diamètre, a aussi 28 pieds de largeur.

La Voûte de 120°, ayant dans l'hypothèse du Probl. 2, 14 pieds de rayon, a pour sa largeur  $14\sqrt{3}$ , & nous avons trouvé que cette Voûte devoit avoir son épaisseur entre 0. 276 & 0. 275.

Si l'on prend 0. 276 pour l'épaisseur de cette Voûte, l'on aura l'épaisseur d'une Voûte semblable de 120° sur 28 pieds de largeur par cette analogie  $14\sqrt{3} : 28 :: 0. 276$  est à l'épaisseur de la Voûte de 120° de 28 pieds de large, laquelle épaisseur est égale  $\frac{0. 276 \times 28}{14\sqrt{3}} = 0. 184\sqrt{3} = 0. 3187$ .

I 2

Mais

Mais nous avons trouvé 1. 4866 pour l'épaisseur uniforme d'une Voûte en plein Cintre & de 28 pieds de diametre ; d'où l'on voit que l'épaisseur d'une Voûte de 120° doit être près de cinq fois plus petite que l'épaisseur d'une Voûte en plein Cintre de pareille largeur de 28 pieds.

Si l'on veut réduire en lignes l'épaisseur 1. 4866 de la Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre , l'on fera cette analogie  $10000 : 14866 :: 144 \text{ lignes} : 214 \text{ lignes environ } \frac{1}{12}$ , dont le quatrieme terme 214 lignes  $\frac{1}{12}$  ou 1 pied 5 pouces 10 lignes  $\frac{1}{12}$  est l'épaisseur d'une Voûte en plein Cintre de 28 pieds de diametre.

L'on aura, par une analogie semblable, l'épaisseur de la Voûte de 120° de 14 pieds de rayon  $1000 : 276 :: 144 \text{ lignes} : 39 \frac{1}{12}$ , ou 3 pouces 3 lignes environ  $\frac{1}{2}$ .

L'on aura pareillement l'épaisseur d'une Voûte de 120° de 28 pieds de largeur par cette analogie  $10000 : 3187 :: 144 \text{ lignes} : 45 \text{ lign. } \frac{1}{12}$ , ou 3 pouces & près de 10 lignes.

Comme toutes les épaisseurs que nous venons de trouver sont très petites , il n'est pas étonnant que l'on trouve aujourd'hui des Voûtes très minces qui subsistent depuis plus de cinq cens ans.

Cependant il faut bien se garder de donner à une Voûte de 120° & de 28 pieds de corde une épaisseur qui soit , comme nous la venons de trouver, seulement de 46 lignes ; car les charnières ou points d'appui des Voussoirs se trouveroient dans les surfaces de la Voûte, enforte que ces Voussoirs qui  
por-

porteroient sur leurs Arrêtes , écraseroient bien-tôt ces Arrêtes , & par conséquent la Voûte périroit , ou changeroit de figure ; c'est pourquoi il faut au moins doubler l'épaisseur que la formule nous donne , & pour-lors les points d'appui des Vouffoirs seront de la quatrième partie de l'épaisseur totale , car pour-lors l'épaisseur de la Voûte que la formule donne se trouvera au milieu de l'épaisseur totale , & comme elle en occupera la moitié , il y aura un quart de l'épaisseur totale au-dessus de l'extrados que donne la formule , & un quart au-dessous de l'intrados de la formule , & par conséquent les charnières qui se trouvent dans l'intrados & l'extrados de la formule , se trouveront au quart de l'épaisseur totale , & dans ce cas la corde appartiendra à un arc pris au quart de l'épaisseur de la Voûte du côté de l'intrados. Il faut remarquer que ceci n'est qu'à peu près , & n'est pas exactement vrai dans la rigueur géométrique , parce que les centres de gravité des Vouffoirs changent en augmentant leur épaisseur.

L'épaisseur de la Voûte étant ainsi doublée , les charnières ou points d'appui seront en état de résister , en sorte que cette Voûte de 28 pieds de corde auroit 92 lignes , ou 7 pouces 8 lignes , & les points d'appui des Vouffoirs en auroient le quart , c'est-à-dire , auroient 1 pouce 11 lignes , ce qui n'est encore qu'une trop foible épaisseur , si la Voûte doit souffrir quelque charge. En un mot , il faut augmenter l'épaisseur trouvée par la formule de la quantité nécessaire à deux

appuis, & cette nécessité doit se régler sur la bonté des matieres dont on doit construire la Voûte.

Ainsi pour que l'épaisseur résultante de notre formule, qui est de près de 3 pouces 10 lignes, soit au milieu de l'épaisseur, il faudroit tripler cette épaisseur résultante 3 pouc. 10 lignes, ce qui donneroit 11 pouc. 6 lign. pour l'épaisseur que l'on doit donner à la Voûte demandée de 14 pieds de rayon, & formée sur un arc de 120 degrés.

### PROBLEME III.

*Déterminer la poussée horizontale d'une Voûte, dont l'intrados & l'extrados sont circulaires, en supposant que les Voussoirs ne sont point polis, & ne peuvent pas par conséquent glisser les uns sur les autres.*

### SOLUTION.

\* Soit le rayon  $MC$  de l'intrados  $= r$ .

L'épaisseur  $AM$  de la Voûte. ....  $= m$ .

L'on aura le rayon  $AC$  de l'extrados  $= r + m$ .

Soit en  $P$  le centre de gravité de la demi-Voûte  $ANM$ . Et soit l'arc  $MN$  de l'intrados. ....  $= a$ .

La hauteur  $MO$  de l'intrados. ....  $= d$ .

L'on aura, par la propriété des centres de gravité, la distance  $P_g$  du centre de gravité  $P$  de ladite Voûte  $AN$  à la fleche  $MO$  de la

$$\text{Voûte} = \frac{6drx + 6drm + 2dm^2}{6ar + 3am}.$$

Main-

Maintenant puisque la pesanteur de la demi-Voute est réunie à son centre de gravité  $P$ ; si par ce centre de gravité  $P$ , l'on tire la verticale  $LR$ , & que par le point  $S$ , milieu de  $AM$ , l'on tire l'horizontale  $SL$ , & que du point  $L$ , où elle rencontre la verticale  $LK$ , l'on tire  $LX$  au milieu du Couffinet, & que du point  $X$ , l'on tire  $XR$  parallèle à  $LT$ , & que l'on fasse  $RT$  parallèle à  $LX$ , l'on aura un parallélogramme  $TX$ , dont la diagonale  $LR$  exprimant la pesanteur de la demi-Voute  $AN$ , la ligne  $LT$  exprimera l'effort que cette demi-Voute  $AN$  fait horizontalement pour résister à l'effort semblable de l'autre demi-Voute, & la ligne  $LX$  exprimera l'effort que cette même demi-Voute  $AN$  fait suivant cette direction  $LX$  contre le Couffinet.

Mais l'effort  $LX$  n'étant point perpendiculaire sur le rayon  $BC$ , ou, ce qui est le même, sur le joint  $BN$ , & faisant un angle obtus  $LXB$ , glisseroit sur ce joint  $BN$  du côté de  $B$ , si le joint étoit parfaitement poli; mais si le joint  $BN$  n'est point poli, la force  $LX$  y trouvera un appui solide, malgré son obliquité, attendu l'engrénage des particules.

Il faut donc nécessairement supposer que les joints d'une Voute circulaire sont graveleux, en sorte que les Voussoirs ne puissent point glisser les uns sur les autres.

Cela posé, il faut chercher quel est l'effort  $LX$  que le Voussoir  $AN$  fait contre le Couffinet  $BN$ .

Mais cette force  $LX$  se décomposant en



deux forces  $ZX$ ,  $RX$ , dont la verticale  $ZX$  exprime la pesanteur du Vouffoir, & l'horizontale  $RX$  exprime l'effort horizontal qui se fait contre le pied-droit, il vaut mieux chercher quelle est cette force verticale  $ZX$ , & cette force horizontale  $RX$ , comme ci-après.

Comme le secteur  $XCS$  est semblable au secteur  $NCM$ ;

L'on aura  $CM : CS :: MO : SQ$ .

C'est-à-dire  $r : r + \frac{m}{2} :: d : SQ = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r}$ .

Mais  $SQ = LR$ . Donc  $LR = \frac{dr + \frac{dm}{2}}{r}$   
 $= \frac{2dr + dm}{2r}$ .

L'on aura aussi  $CN : CX :: NO : XQ$ .  
 C'est-à-dire .....  $r : r + \frac{m}{2} :: NO : XQ$ .

Mais. . . . .  $NO^2 = CN^2 - CO^2$ .  
 Et  $CO^2 = rr - 2dr + dd$ , parce que  $CO = r - d$ .  
 Et  $CN^2 = rr$ . Donc  $NO^2 = CN^2 - CO^2 = 2dr - dd$ .

Donc  $r : r + \frac{m}{2} :: \sqrt{2dr - dd} : XQ$   
 $= \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$ .

Maintenant si de  $XQ$ , que nous venons de trouver  $= \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$ , l'on retranche  $RQ$ , ou son égal  $Pe$ , que nous avons trou-

trouvé =  $\frac{6drr + 6drm + 2dmm}{6ar + 3am}$ , le reste

$$r + \frac{m}{2} \times \frac{2dr - dd}{r} = \frac{6drr - 6drm - 2dmm}{6ar + 3am}$$

fera la valeur de  $XR$ , qui exprime l'effort horizontal que la Voûte fait contre le pied-droit ou pilier-butant.

Maintenant si l'on exprime la pesanteur de la demi-Voûte par sa surface  $ANM$ , au lieu de l'exprimer par  $LR$ , comme nous l'avons fait ci-devant, l'on aura cette surface  $ANM$  de la manière suivante.

Puisque l'arc  $MN$  de l'intrados =  $a$ , l'on aura l'arc  $A_1$  de l'extrados par cette analogie,  
 $CM : CA :: MN : A_1$ .

C'est-à-dire  $r : r + m :: a : A_1 = \frac{ar + am}{r}$ .

Et si l'on multiplie ces deux arcs  $MN = a$

&  $A_1 = \frac{ar + am}{r}$  par la moitié de leur distance  $AM$ , c'est-à-dire, par  $\frac{m}{2}$ , le produit  $\frac{ma}{2}$

$$+ \frac{amr + am^2}{2r} = \frac{2amr + am^2}{2r}$$

fera la surface de la demi-Voûte  $A_1NM$ , c'est-à-dire, fera la pesanteur de cette demi-Voûte.

Mais la pesanteur de cette demi-Voûte est à l'effort horizontal  $RX$  comme  $LR$  est à  $RX$ ; l'on aura donc l'effort horizontal qui se fait suivant  $RX$  par cette analogie  $LR$ ,

que nous avons trouvée =  $\frac{2dr + dm}{2r}$ ,

est à  $RX = \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r}$

$= \frac{6dr - 6dm - 2dm}{6dr + 3am}$  comme la pesanteur

$\frac{2amr + am}{2r}$  de la demi-Voute est à l'effort horizontal de la Voute suivant  $RX$ , que l'on trouvera  $= \frac{2amr + am}{2dr + dm}$

$\times \frac{r + \frac{m}{2} \sqrt{2dr - dd}}{r} = \frac{6dr - 6dm - 2dm}{6dr + 3am} = \frac{am}{d}$

$\times \frac{r + \frac{m}{2} \times \sqrt{2dr - dd}}{r} = \frac{6dr - 6dm - 2dm}{6dr + 3am}$

$= \frac{2am + am}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} = \frac{6mr - 6mm - 2m^2}{6r + 3m}$

qui est la poussée horizontale qu'il falloit trouver.

## PROBLEME IV.

\* Lorsque les Voussoirs ne sauroient glisser les uns sur les autres, trouver la base EF du pied droit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la Voute, de sa poussée horizontale, & de la pesanteur dudit pied-droit, soit dirigé vers un point donné quelconque H de ladite base EF.

So

Fig. 4

## SOLUTION.

Pour abréger le calcul, soit regardé le trapeze  $BIFN$  comme un parallélogramme, dont la hauteur soit  $GV$ , moyenne entre  $BI$  &  $NF$ .

Quoique dans ce changement, où les surfaces sont égales, le centre de gravité  $D$  du trapeze se trouve transporté au centre de gravité  $K$  du parallélogramme, & que l'on donne par conséquent à la surface  $BIFN$ , regardée comme un parallélogramme, plus d'énergie qu'elle n'en auroit en la regardant comme un trapeze: ce changement est si léger, qu'on le peut regarder comme zero, puisque l'on est obligé de faire aux pied-droits des changemens beaucoup plus considérables, comme d'y percer des Fenêtres & des Portes, auxquelles cependant on ne fait aucune attention.

Soit donc la hauteur moyenne  $VG$ ,  
du pied-droit. . . . .  $= p$ .

La base  $IF$  du trapeze regardé  
comme parallélogramme. . . . .  $= q$ .

Puisque  $BIFN$  est regardé com-  
me un parallélogramme, nous aurons  
sa surface . . . . .  $= pq$ .

Soit la base entiere  $EF$  du pied-  
droit . . . . .  $= x$ .

La base  $EI$  de son fruit fera . . . . .  $= x - q$ .

Si l'on fait la hauteur  $BI \pm VG = p$ , l'on  
aura la surface du talus  $BIE \pm \frac{x^2 - q^2}{2p}$ .

Comme nous exprimons la pesanteur de la

Maçonnerie par son profil ou surface de sa coupe, nous aurons la pesanteur de la partie  $BIFN = pq$ , & nous aurons la pesanteur de

la partie  $BIE = \frac{px - pq}{2}$ .

Maintenant soit le point d'appui  $H$ , placé de manière que l'on ait...  $EF:EH::f:g$ .  
C'est-à-dire que l'on ait...  $x:EH::f:g$ .

L'on aura...  $EH = \frac{gx}{f}$ .

Comme la pesanteur du parallélogramme  $BIFN$  est réunie à son centre de gravité, ou son milieu  $K$ , elle est appliquée au bras de levier  $HG$ .

Mais  $HG = EF - GF - EH = x - \frac{g}{2} - \frac{gx}{f}$ .

Ainsi en multipliant la pesanteur  $pq$  par ce bras de levier  $HG = x - \frac{g}{2} - \frac{gx}{f}$ , le produit  $pqx - \frac{pqg}{2} - \frac{pqgx}{f}$  sera l'énergie de la partie  $BIFN$  du pied-droit.

De même si l'on multiplie la pesanteur de la partie  $BIE = \frac{px - pq}{2}$  par son bras de levier  $HZ$ , le produit sera son énergie. Mais  $HZ = EZ - EH = \frac{2x - 2g}{3} = \frac{gx}{f}$ . Donc l'énergie de la partie  $BIE$  du pied-droit sera  $= \frac{2pxx - 4pqx + 2pqg}{6} - \frac{2gxx}{2f} + \frac{2pqg}{2f}$ .

Et si l'on ajoute ensemble l'énergie de la

la partie *BIFN* & celle de la partie

$$BIE, \text{ leur somme } pqx = \frac{pqg}{2} - \frac{pqsx}{f} \\ + \frac{2pxx - 4pqx + 3pg}{6} - \frac{pgxx + pqsx}{2f}$$

fera l'énergie du pied-droit entier sur le point d'appui *H*.

Laquelle énergie étant abrégée, devient

$$\frac{2pxx + 3pqx - pg}{6} - \frac{pgsx - pgsx}{2f}$$

Voyons maintenant l'énergie de la Voûte qui doit faire équilibre avec le pied-droit sur le point d'appui *H*.

Nous avons trouvé, dans le Problème précédent, que l'effort de la Voûte, suivant *LX*, se décomposoit en deux autres, l'un suivant *ZX*, égal à la pesanteur de la Voûte, & l'autre suivant *RX*.

Mais dans le même Problème précédent nous avons trouvé la pesanteur de la Voûte

$$= \frac{2.6mr + 6mms}{2r}, \text{ \& l'effort horizontal suivant}$$

$$RX = \frac{2.6mr + 6mms}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrr - 6mmsr - 2m^2}{6r + 3ms}$$

Ainsi en multipliant la pesanteur ou l'effort vertical suivant *ZX* par son bras de levier *HT = HF - TF*, l'on aura l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, laquelle énergie sert à affermir le pied-droit.

$$\text{Mais } HF = EF - EH = x - \frac{sx}{f}.$$

Et l'on peut, pour abréger, faire *TF* égale à la

la moitié de l'épaisseur de la Voûte, c'est-à-dire,  $= \frac{m}{2}$ .

Donc le levier  $HT = x - \frac{5x}{f} - \frac{m}{2}$ , lequel levier étant multiplié par la pesanteur  $\frac{22mr + 4m^2}{2r}$  de la Voûte, le produit  $\frac{22mrx + 4m^2x}{2r}$

$= \frac{22mrgx - 4m^2gx}{2fr} - \frac{22m^2rx - 4m^3}{4r}$  sera l'é-

nergie de l'effort vertical que la Voûte fait pour affermir le pied-droit.

Et si l'on multiplie l'effort horizontal  $RX$  de la Voûte  $= \frac{22mr + 4m^2}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd}$

$= \frac{6mrr - 6m^2r - 2m^3}{6r + 3m}$  par son bras de levier

$= H = VG = p$ , le produit  $\frac{22m^2pr + 4m^3p}{2dr}$

$\times \sqrt{2dr - dd} = \frac{6mrrp - 6m^2rp - 2m^3p}{6r + 3m}$  sera

l'énergie de l'effort horizontal que la Voûte fait pour renverser le pied-droit.

Comme l'effort vertical que la Voûte fait, sert à affermir le pied-droit, & que l'effort horizontal tend à le renverser, si l'on retranche l'énergie de l'effort vertical de la Voûte, de l'énergie de son effort horizontal, le reste fera la véritable énergie que la Voûte employe pour renverser le pied-droit sur le point d'appui  $H$ , & ce reste sera

$$\frac{2ampr - ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} - \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m}$$

$$- \frac{2amrx - ammx}{2r} + \frac{2amrgx + ammgx}{2fr}$$

$$+ \frac{2amnr + am^3}{4r}$$

Maintenant puisque, suivant l'hypothèse, l'effort composé de la pesanteur de la Voûte, de son effort horizontal, & de la pesanteur du pied-droit, doivent être dirigés vers le point d'appui  $H$ , il faut que l'énergie du pied-droit & l'énergie de la Voûte soient en équilibre, c'est-à-dire, égales sur ce point d'appui  $H$ , ce qui donne cette Equation

$$\frac{2pxx + 2pqs - 299}{6}$$

$$- \frac{298x - 28xx}{2f} = \frac{2ampr - ammp}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd}$$

$$- \frac{6mrrp - 6mmrp - 2m^3p}{6r + 3m} - \frac{2amrx - ammx}{2r}$$

$$+ \frac{2amngx + ammgx}{2fr} + \frac{2amnr + am^3}{4r}$$

D'où l'on tire

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{aligned} &\frac{99f}{2f - 3g} + \frac{6amfr - ammf}{2fdr - gdr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ &- \frac{12mrrf - 12mmrf - 4m^3f}{4rf + 2mf - 6rg - 3gm} + \frac{6amrff + 3am^3f}{4prf - 6pgr} \\ &+ \left\{ \frac{9}{2} + \frac{6amrf + 3ammf - 6amrg - 3amng}{4pfr - 6pgr} \right\} \end{aligned} \right\}}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{6amrf - 3ammf + 6amrg + 3amng}{4pfr - 6pgr}$$

Ce qu'il falloit trouver.



## COROLLAIRE.

-Si l'on vouloit que le point d'appui  $H$ , vers lequel est dirigé l'effort composé de la Voûte & du pied-droit, fût dans la surface extérieure du pied-droit, il faudroit faire  $EH=0$ ; & comme nous avons fait  $EF:EH::f:g$ , l'on aura  $EF:0::f:g$ , & par conséquent l'on aura  $g=0$ .

Substituant donc 0. en la place de  $g$  dans la formule du Problème, l'on aura une autre Equation qui donnera la base  $x$  du pied-droit, telle que l'effort composé de la poussée de la Voûte & de la pesanteur du pied-droit sera dirigé vers l'extrémité extérieure de la base, & cette formule sera

$$x = \sqrt{\left\{ \begin{aligned} &\frac{qq}{2} + \frac{6amr - 3am^2}{2dr} \times \sqrt{2dr - dd} \\ &- \frac{6mrr - 6m^2r - 2m^3}{2r + m} + \frac{6amrr + 3am^3}{4pr} \\ &+ \left\{ \frac{q}{2} + \frac{6amr + 3am^2}{4pr} \right\}^2 \end{aligned} \right\}} \\ \rightarrow \frac{q}{2} - \frac{6amr - 3am^2}{4pr}.$$

*Application du Problème précédent à une Voûte, dont les dimensions & la hauteur du Pied-droit soient données, & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF du Pied-droit.*

\* Soit une Voûte, dont l'intrados soit un arc

† Fig. 4.

arc de  $120^\circ$ , & dont la corde soit de 28 pieds, la moitié de cette corde fera le sinus de  $60^\circ$ , ainsi l'on aura le rayon  $r$  de la Voûte par cette analogie,

Le sinus de  $60^\circ$ , qui est de..... 86602  
Est au rayon ou sinus total..... 100000

Comme la moitié de la corde de Voûte, c'est-à-dire 14. Est au rayon de ladite Voûte, lequel rayon se trouve par l'opération de  $16 \frac{17}{100}$ .

Soit l'épaisseur de la Voûte  $= \frac{1}{4}$ ,

Puisque l'arc  $MN$  est de 60 degrés, l'on aura  $MO$ , c'est-à-dire, la hauteur de la fleche de l'intrados au-dessus du pied-droit égale à la moitié du rayon, c'est-à-dire, égale 8. 085.

Mais nous avons fait  $MO = d$ , donc l'on aura  $d = 8. 085$

Puisque le rayon de la Voûte  $= 16. 17$ .

Son diamètre sera . . . . . 32. 34.

Multipliant ce diamètre par  $3. \frac{1}{4}$ .

97. 02.

4. 62.

Le produit . . . . . 101. 64. donnera la circonference, dont la sixieme partie 16. 94 sera la valeur de l'arc de 60 degrés, c'est-à-dire, sera la valeur de la moitié de l'intrados, laquelle moitié nous avons appelée  $a$ .

Maintenant soit la hauteur  $p$  du pied-droit . . . . .  $= 20$

la base  $q$  de la partie parallélipédale du pied-droit . . . . .  $= \frac{2}{3}$  de même que l'épaisseur de la Voûte.

Enfin le point  $H$ , où l'on veut que soit diri-

dirigé l'effort composé de tous les efforts, soit éloigné de la face extérieure dudit pied-droit de la valeur de  $\frac{1}{4}$  de sa base, c'est-à-dire, de manière que l'on ait  $EF : EH :: 3 : 1$ .

Mais nous avons dans le Problème précédent  $EF : EH :: f : g$ , donc nous avons  $f = 3$ , &  $g = 1$ .

Et si l'on substitue dans l'Equation qui donne la valeur de  $x$  ces grandeurs

|     |    |    |     |     |     |    |  |    |     |               |  |               |  |               |  |   |  |  |     |  |  |  |  |     |  |  |  |  |     |  |  |  |  |     |
|-----|----|----|-----|-----|-----|----|--|----|-----|---------------|--|---------------|--|---------------|--|---|--|--|-----|--|--|--|--|-----|--|--|--|--|-----|--|--|--|--|-----|
| 16. | 17 | 8. | 085 |     | 16. | 94 |  | 20 |     | $\frac{2}{3}$ |  | $\frac{2}{3}$ |  | $\frac{2}{3}$ |  | 1 |  |  |     |  |  |  |  |     |  |  |  |  |     |  |  |  |  |     |
|     |    |    |     | $d$ |     |    |  |    | $e$ |               |  |               |  | $p$           |  |   |  |  | $q$ |  |  |  |  | $m$ |  |  |  |  | $f$ |  |  |  |  | $g$ |

en la place de  $r$

L'on trouvera  $x = 5$  pieds  $\frac{1}{2}$  pour la base du pied-droit cherchée, sur laquelle base  $x = EF$ , le point d'appui  $H$  est au tiers de ladite base, enforte que  $HF$  sera de 3 pieds  $\frac{1}{2}$ .

*Application du Corollaire du Problème précédent à une Voûte, dont les dimensions sont comme celles du Problème, & dans laquelle il s'agit de trouver la base EF, telle que la poussée de la Voûte & de la pesanteur du pied-droit soient dirigées vers l'extrémité extérieure E de ladite base.*

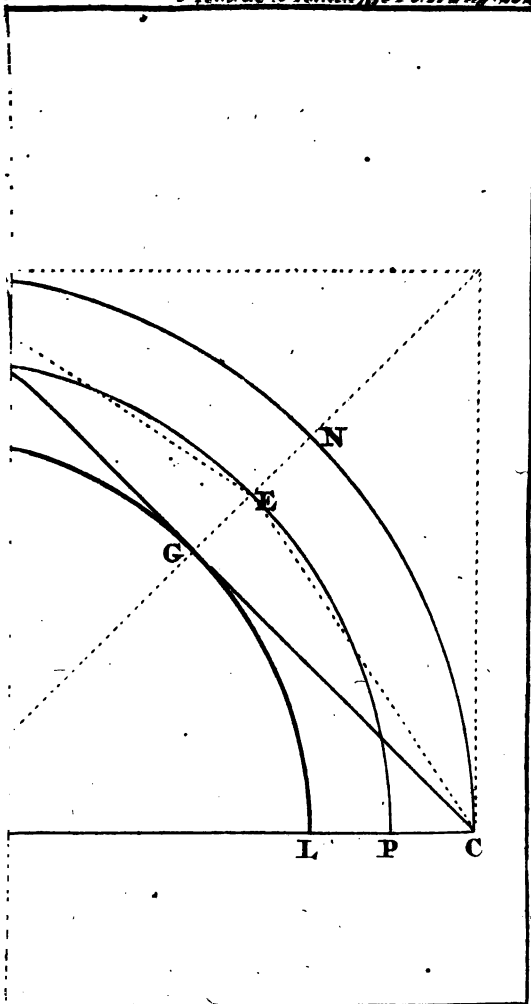
Comme les dimensions de la Voûte sont toujours les mêmes, l'on aura, comme dans l'application du Problème,

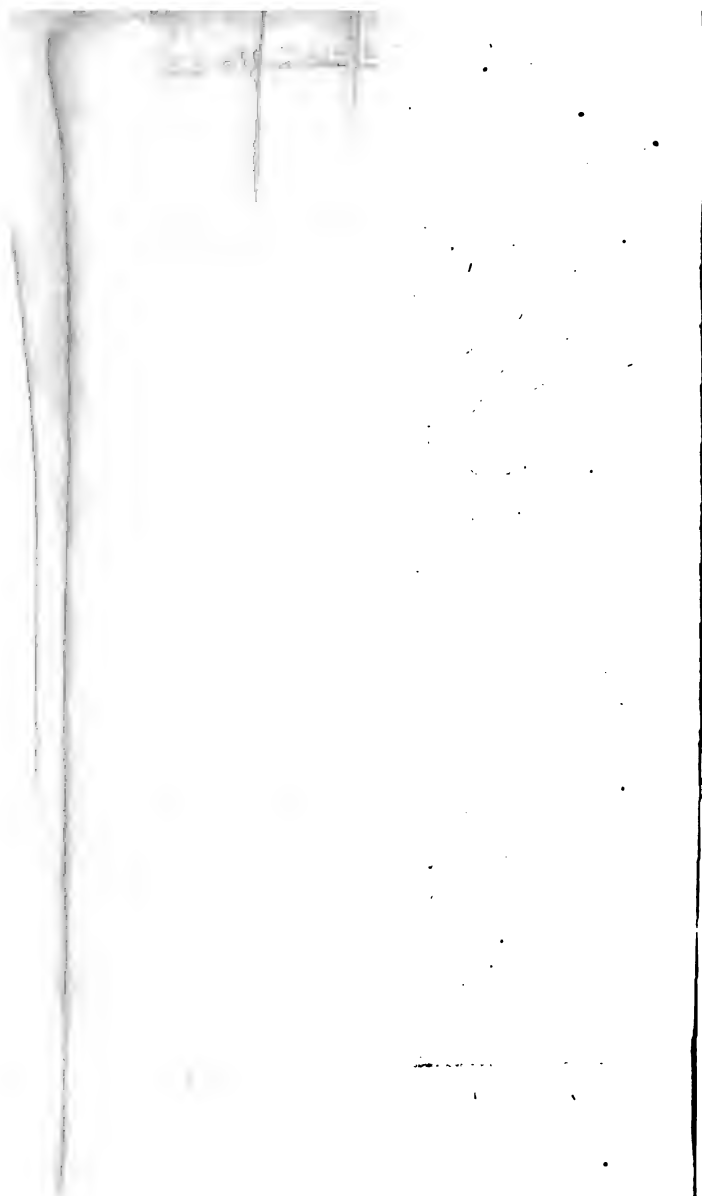
|     |    |    |     |     |     |    |  |    |     |               |  |               |  |     |  |  |  |  |     |  |  |  |  |     |
|-----|----|----|-----|-----|-----|----|--|----|-----|---------------|--|---------------|--|-----|--|--|--|--|-----|--|--|--|--|-----|
| 16. | 17 | 8. | 085 |     | 16. | 94 |  | 20 |     | $\frac{2}{3}$ |  | $\frac{2}{3}$ |  |     |  |  |  |  |     |  |  |  |  |     |
|     |    |    |     | $d$ |     |    |  |    | $e$ |               |  |               |  | $p$ |  |  |  |  | $q$ |  |  |  |  | $m$ |

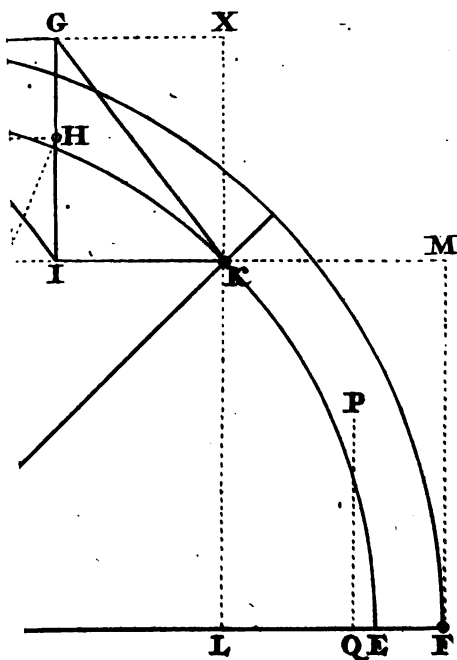
pour  $r$

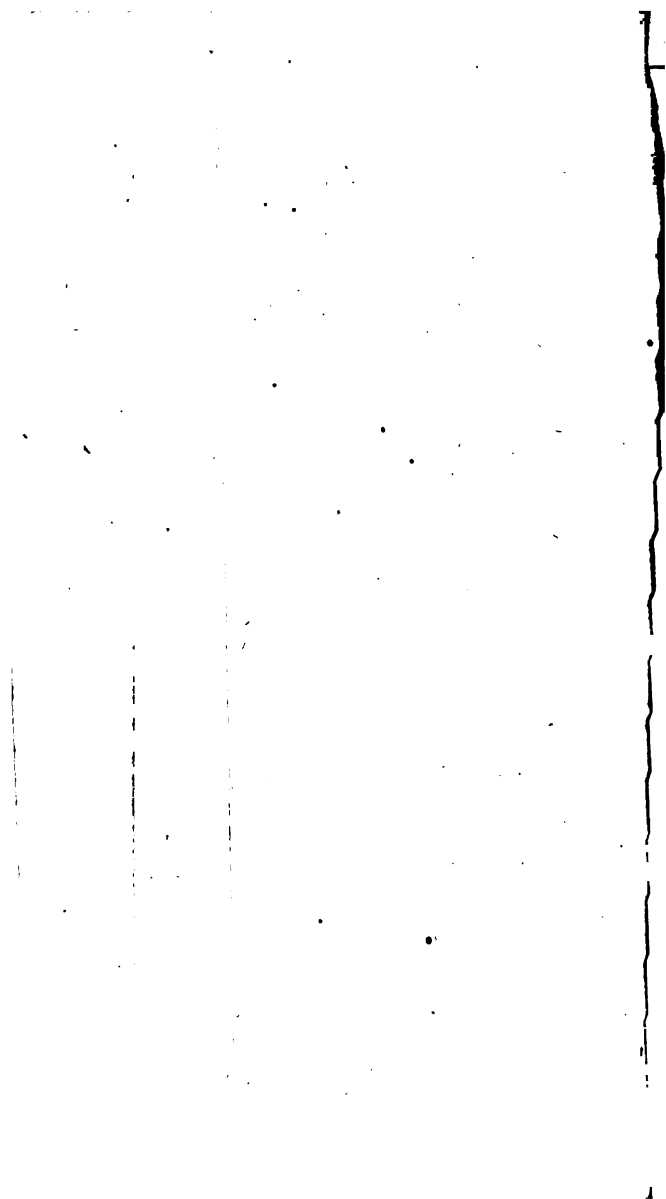
Substituant ces grandeurs déterminées en la place des lettres dans l'Equation du Corollaire, l'on aura la base  $x = 3$   $\frac{1}{3}$ , c'est-à-dire  $= 3$  pieds  $\frac{1}{3}$ .

Comme le pied-droit ou son profil est composé





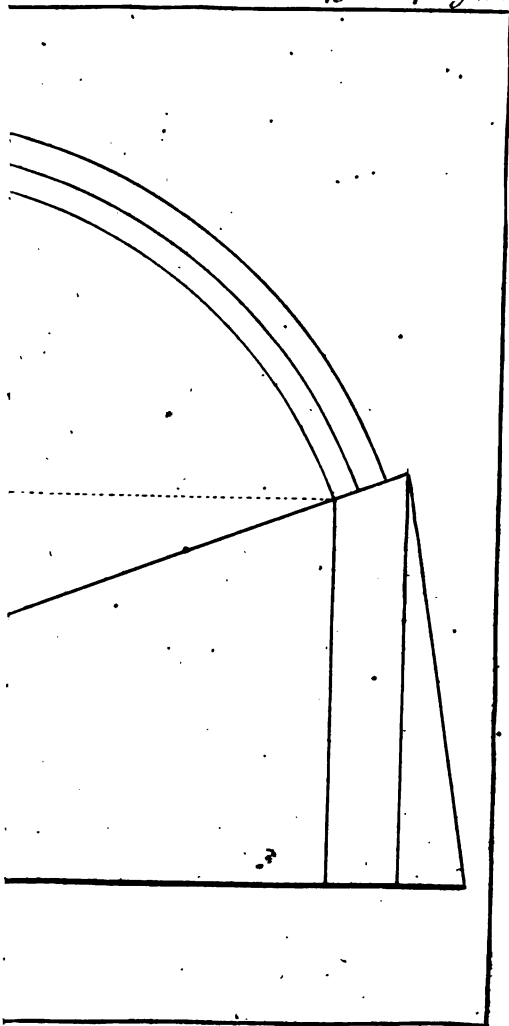


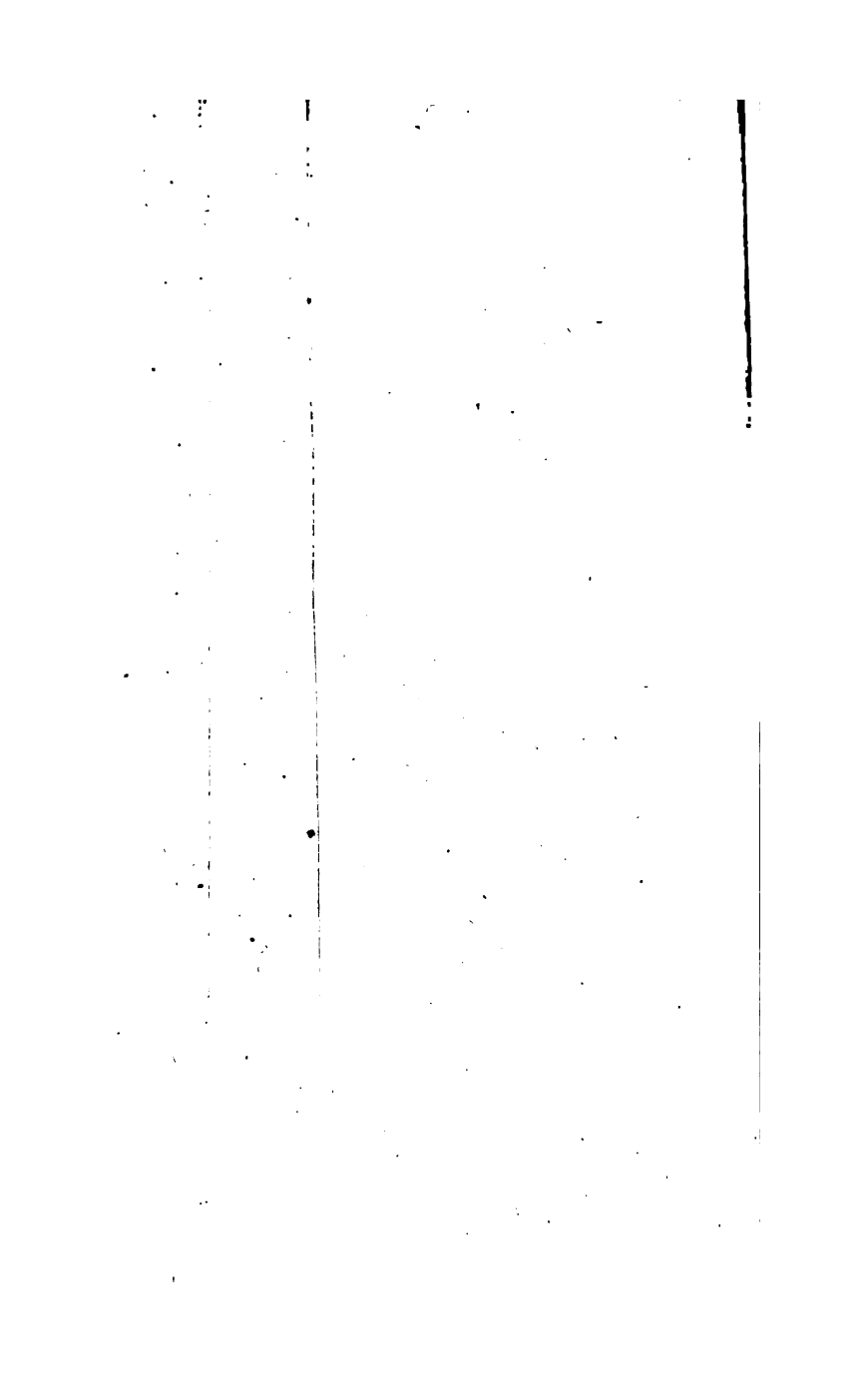












posé de deux parties, dont l'une est parallélogrammique, & que l'épaisseur ou base de la partie parallélogrammique est égale à l'épaisseur de la Voûte qui est de  $\frac{1}{2}$ , il restera 3 pieds pour le fruit ou base de la partie qui est triangulaire; & si l'on ajoute  $\frac{1}{4}$  à ces 3 pieds pour prévenir l'écrasement des parties, la base totale du pied-droit sera de 4 pieds; & comme la hauteur du pied-droit est de 20 pieds, cette base totale de 4 pieds sera égale à la cinquième partie de la hauteur.

Si l'on faisoit l'épaisseur de la muraille au pied-droit de 2 pieds par en-haut, c'est-à-dire, au Couffinet, pour-lors l'on trouvera la base entière  $EF = x = 3.597$ , c'est-à-dire = 3 pieds 7 pouces 2 lignes, en dirigeant l'effort composé à l'extrémité extérieure  $E$  de la base  $EF$ . On pourra faire de semblables applications pour toutes sortes de Voûtes circulaires, dont l'épaisseur & la grandeur seront données avec la hauteur du pied-droit.

S U I T E

~~~~~

SUITE DES OBSERVATIONS

SUR L'AIMANT.

Par M. DU FAY. *

DANS le Mémoire que je lus en 1728, je rapportai plusieurs Expériences qui tendoient à prouver que si l'on veut aimanter un morceau de Fer, enforte que sa direction soit déterminée, il ne faut que le rompre, le frapper, le frotter, enfin donner par quelque moyen que ce soit un ébranlement à ses parties, tel que les petites branches, pointes ou poils, que j'ai supposés, après Descartes & la plupart des Physiciens, remplir les pores du Fer, puissent être abattus ou renversés vers celle des extrémités qu'on veut faire diriger vers le Nord. J'ai varié ces Expériences d'un grand nombre de façons, & il me paroît qu'il peut demeurer pour constant, qu'un Fer n'est aimanté que lorsque tous ses poils, ou du moins la plus grande partie, sont couchés en un même sens.

Je ne dois pas omettre une objection qui m'a été faite sur l'extrême mobilité que je suppose dans ces petites branches ou poils; ils doivent être si déliés que leur pesanteur sera, dit-on, regardée comme nulle, & qu'il est impossible qu'ils tombent par leur seul poids,

* 19 Avril 1730.

poids, suivant les différentes situations ou les ébranlemens qu'on peut donner à la barre de Fer. Quoique cette objection semble forte, il est très facile d'y répondre. On sait que les corps n'ont de pesanteur que relativement au milieu dans lequel ils se trouvent; & qu'une plume mise dans un tuyau vuide d'air, y tombe avec la même vitesse, c'est-à-dire, y a la même pesanteur qu'un morceau de bois: or, il est certain que les pores du Fer ne sont pas remplis d'air; par conséquent, quelque déliés que soient ces petits poils, ils ont une pesanteur relative au milieu dans lequel ils se trouvent, une pesanteur réelle qui fait qu'ils se renversent d'un côté ou de l'autre, suivant les mouvemens qu'on donne à la barre.

Si l'on a frotté un morceau de Fer sur une Pierre d'Aimant, & que le tenant dans une situation perpendiculaire, on frappe sur l'extrémité qui se dirige au Sud, on ne fera qu'augmenter la vertu, parce qu'on ne fait qu'abattre un plus grand nombre de poils vers le côté où ils doivent être: mais si on frappe sur l'autre bout, les poils se redressent, le passage se ferme à la matiere magnétique, la vertu du Fer diminue; & si l'on continue de frapper, elle se perd entièrement, passe à l'autre bout du Fer, & lui donne une direction contraire à celle qu'il avoit auparavant.

Ces faits, qui sont fondés sur l'expérience, étant une fois bien établis, il suit assez naturellement, qu'il n'y a qu'un seul courant de la matiere magnétique, & qu'elle entre dans le Fer aimanté par le côté qui se dirige
vers

vers le Sud, puisque les poils qui sont couchés vers l'autre extrémité la laissent entrer & sortir sans peine lorsqu'elle va dans ce sens, mais qu'ils s'opposeroient à son entrée en lui présentant leurs pointes, si elle alloit dans le sens opposé. Cette hypothese, & celle du renversement des poils, étant admises, tous les phénomènes de l'Aimant s'expliquent avec une facilité infinie. J'ai donné dans mon premier Mémoire l'explication de ceux qui sont le plus connus: mais si l'on veut se donner la peine d'en faire l'application à tous les autres, en y joignant l'unité du courant, j'ose assurer que l'on en trouvera l'explication plus facile que dans aucun autre système.

Je dois avertir ici, que pour éviter l'obscurité ou l'équivoque, je ne désignerai point les poles de l'Aimant par les noms de Boreal & d'Austral, parce que, quoiqu'il soit reçu que le pôle qui se dirige vers le Sud soit le Boreal, il m'a paru que cette définition ne se présentoit pas toujours bien nettement à l'esprit, & j'ai cru qu'il valoit mieux les désigner par celui qui se dirige au Nord, & celui qui se dirige au Sud.

Une particularité très connue de l'Aimant & du Fer aimanté, est que le pôle qui se dirige vers le Nord, leve plus de Fer que l'autre. Descartes & presque tous les Physiciens qui l'ont suivi, ont supposé, premièrement, que cela n'arrivoit que dans les Païs septentrionaux, sans se fonder sur aucune Expérience, que je sache; & ils ont expliqué ce fait, en disant que le pôle Boreal de la Terre, con-

considéré comme un grand Aimant, fortifié soit le pôle Austral des Pierres d'Aimant, ou du Fer aimanté, de même qu'il arrive à deux Aimants qu'on approche l'un de l'autre par les pôles de différent nom.

Il y a plusieurs choses à considérer dans cette explication. 1^o. Quoiqu'il soit certain que dans ce Pays-ci le pôle de l'Aimant qui se dirige vers le Nord lève plus de Fer que l'autre, & qu'il n'y ait qu'à plonger une Pierre d'Aimant dans la limaille pour en être convaincu, il est néanmoins très douteux que cela n'arrive pas de même dans les Pays méridionaux, & il sera du moins permis d'en douter jusqu'à ce qu'on en ait fait quelques Expériences. 2^o. L'Expérience qui est apportée en comparaison, n'est vraie que dans un cas qui n'est assurément pas celui de la Terre à l'égard d'un Aimant, & il est très aisé de s'en éclaircir de la manière la plus convaincante; il ne faut qu'approcher l'un de l'autre deux Aimans à peu près d'égale force, par les pôles de différent nom, sans qu'ils se touchent cependant, parce qu'alors ils ne feroient plus l'effet que d'un seul Aimant; on plongera ensuite dans la limaille le pôle de l'un des Aimants qui se dirige vers le Nord, en sorte qu'il se charge de tout ce qu'il en pourra porter. S'il étoit vrai que la proximité du pôle de l'autre Aimant augmentât sa force, il n'est pas douteux que lorsqu'on viendra à éloigner le second, une partie de la limaille ne dût se détacher, il doit même en tomber encore davantage si on le retourne, & que l'on présente le pôle du

du Nord à la place de celui du Sud, car si l'un augmentoit la force du pôle du premier Aimant, l'autre doit certainement la diminuer: il n'arrive cependant rien de tout cela, & il ne tombe point de limaille du premier, soit que l'on en éloigne l'autre, ou qu'on l'en approche par l'un ou l'autre de ses pôles.

J'ai observé de prendre deux Aimants à peu près d'égale force, parce que si l'un des deux est de beaucoup plus fort que l'autre, comme il est environné d'un tourbillon de matière très étendu, il fortifie nécessairement le tourbillon de l'Aimant foible, de même qu'un Fer reçoit en présence de l'Aimant une vertu magnétique qu'il perd lorsqu'on l'en éloigne; c'est aussi l'explication que donna M. de Reaumur en 1723, de ce qu'un outil foiblement aimanté enlevait plusieurs clous posés sur une grosse enclume, tandis qu'il en enlevait un avec peine lorsqu'on les mettoit sur une table. Mais si la force des deux Aimants dans notre Expérience n'est pas bien différente, leur vertu n'est point du tout augmentée par l'approche des pôles de différent nom.

C'est cependant sur cette supposition qu'est fondée l'explication de Descartes. Mais on peut aller plus loin, & dire, que quand l'Expérience seroit vraie dans le cas de deux Aimants d'une force à peu près égale, cela ne suffiroit pas pour en conclurre qu'il arrive la même chose à l'égard de la Terre: car le peu d'effet que pourroit faire la proximité du pôle Boréal de la Terre, ne peut être comparé à celui de deux Aimants que l'on met l'un
au.

auprès de l'autre, & l'on ne peut pas raisonnablement regarder l'un comme une conséquence de l'autre: l'explication donnée jusqu'à présent ne peut donc pas se soutenir, & il faut nécessairement en chercher une autre; elle se trouve naturellement dans le système d'un seul courant.

Presque tous les Physiciens ont supposé que la matière magnétique se meut avec plus de facilité dans l'Aimant & dans le Fer aimanté, que dans l'air. M. de Reaumur a cependant fait contre ce principe quelques difficultés, qui lui semblent prouver que la matière magnétique trouve peut-être plus de difficulté à se mouvoir dans le Fer que dans les autres corps, & qu'on pourroit expliquer par-là tous les phénomènes de l'Aimant. Cette idée est très ingénieuse, & mérite fort d'être approfondie; j'espère même que M. de Reaumur voudra bien nous la donner quelque jour plus en détail: mais comme l'opinion contraire est aujourd'hui presque universellement reçue, je crois devoir en faire la base de mon système, d'autant plus même que l'opinion de M. de Reaumur étant précisément l'inverse de celle que j'admets, mon explication s'accordera également avec la sienne, en changeant seulement l'application.

M'en tenant donc à l'ancienne opinion, & supposant l'hypothèse d'un seul courant suivant laquelle la manière n'entre que par un des pôles, & ne sort que par l'autre, on verra qu'elle doit non-seulement entrer par l'extrémité * S dont j'ai supposé les poils

Mém. 1730.

K

cou-

*.Fig 1.

couchés de façon à lui donner un passage libre, mais aussi par tous les points voisins de ce pôle, comme *B*, *C*, *D*, *E*; mais la matière étant une fois dans le Fer, elle y reste le plus longtems qu'il lui est possible, par la difficulté qu'elle trouve à pénétrer les parties de l'air, & par conséquent la plus grande partie n'en sort que par l'extrémité *N* qui est la plus éloignée. C'est donc vers ce seul point que se trouvent réunis tous les torrens de matière qui sont entrés par divers points du pôle opposé. Ce pôle se trouvera donc avoir plus de vertu que l'autre, par la réunion & l'abondance de la matière. Voilà où nous mène le raisonnement, & l'expérience nous prouve en effet que c'est ce pôle qui enlève le plus de Fer.

Il faut encore quelque chose cependant pour que l'esprit soit entièrement satisfait; il faut voir, & toucher, pour ainsi dire, cette différence entre la densité du torrent de matière à l'entrée & à la sortie de la Pierre: il ne faut pour cela qu'examiner avec attention la plus commune de toutes les Expériences de l'Aimant, qui est de poser sur une table une Pierre d'Aimant, ou une lame d'Acier aimantée, de mettre une feuille de papier par dessus, & de jeter avec un poudrier de la limaille de Fer sur le papier. On fait qu'elle s'arrange en tourbillon, & trace exactement la route de la matière magnétique autour de la Pierre; mais si l'on y prend bien garde, on verra que les filets de limaille sont toujours un peu plus resserrés, & plus proche les uns des autres autour du pôle *N*,
qui

qui se dirige vers le Nord, qu'autour de l'autre, comme on le voit dans les Fig. 1 & 2. Si l'on n'a pas fait cette attention jusqu'à présent, c'est qu'il n'est pas facile de trouver un Aimant, ni même une lame d'Acier, dont les deux poles soient d'égale bonté; le mélange de parties hétérogenes dans l'Aimant, & la façon de toucher les lames, peuvent causer de si grandes varietés, qu'il n'est pas étonnant qu'on ne se soit point aperçu jusqu'à présent de cette disposition du tourbillon, qui n'est pas infiniment remarquable, mais que l'on trouvera toujours constante, si l'on se sert d'une lame touchée bien également, avec les précautions que je rapporterai à la fin de ce Mémoire, & que l'on ait soin de répandre la limaille le plus également qu'il sera possible.

Il me semble que cette Observation est une nouvelle preuve de l'unité du courant, & de la direction de son mouvement. J'en ajouterai encore une qui mérite quelque attention, quoiqu'à dire le vrai, elle doive être regardée comme une convenance avec le système, plutôt que comme une preuve. M. Halley, & plusieurs autres Physiciens depuis lui, ont dit que la matiere magnétique pouvoit avoir quelque part aux Lumieres boréales. Sans entrer dans le détail de leurs opinions particulieres, je dirai simplement qu'on pourroit les expliquer en cette sorte. Les exhalaisons inflammables, ou même dont quelques-unes sont déjà enflammées, étant répandues dans l'air, si leur degré de densité ou de pesanteur les amene à la distance de

la Terre où la matiere magnétique circule en plus grande abondance, ce torrent qui coule vers le Nord, rassemble ces exhalaisons éparées dans toute l'Athmosphère, & les réunit vers le pôle; celles qui sont déjà enflammées embrasent les autres, ou la seule collision les allume, & le courant de matiere les dispose en forme de rayons, tels que nous les voyons. On peut encore ajouter, que suivant les observations les plus exactes, le centre auquel aboutissent ces rayons, décline presque toujours vers l'Ouest de 14 ou 15 degrés, ce qui est à peu près la quantité dont l'Aiguille décline présentement. Si ce centre des rayons des Aurores boréales venoit à suivre à l'avenir les variations de l'Aimant, cela pourroit nous mener à quelque chose de plus positif: mais je ne pousserai pas maintenant plus loin cette explication, qui n'est qu'une conjecture, quoiqu'elle ne soit pas absolument sans vraisemblance, & qu'elle puisse devenir beaucoup plus forte, si jamais nous sommes assurés par de bonnes Observations, qu'on ne voit pas de pareilles lumières vers le pôle méridional.

Ce n'est pas assez d'avoir tâché d'établir le système d'un seul courant par les diverses preuves que j'ai pu en trouver, il faut à présent répondre aux objections qu'on peut y faire. Celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit, est que s'il n'y avoit qu'un seul courant de matiere magnétique, une Aiguille aimantée étant posée librement sur la surface de l'eau, seroit portée par le mouvement de la matiere vers l'un des poles, & que

que pour que cela n'arrive point, il faut qu'elle soit poussée par deux courans d'égale force, dont l'un fasse équilibre à l'autre, & qui ne lui permettent que de tourner sur elle-même pour se diriger vers les poles, sans la pousser plutôt vers l'un que vers l'autre.

Avant que de répondre à cette objection, on peut dire qu'elle seroit presque aussi forte contre le systéme des deux courans; car comme le pole qui se dirige vers le Nord est plus fort que l'autre, il s'ensuivroit que le courant du Sud au Nord auroit plus de force, & que par conséquent l'Aiguille devroit être emportée vers le Nord; ainsi l'objection est à peu près la même dans tous les systémes; mais elle n'en est pas plus solide, & il est facile d'y répondre. Il ne faut pour cela que se souvenir du principe reçu dans presque toutes les hypothèses, qui est que la matière se meut avec plus de facilité dans l'Aimant, ou dans le Fer aimanté, que dans l'air. Ce principe établi, l'Aiguille posée sur l'eau ne doit point avoir de mouvement processif vers le Nord, car pour qu'elle fût entraînée par le courant de la matière, il faudroit que la matière trouvât plus de résistance à pénétrer les pores de l'Aiguille, que l'Aiguille même n'en trouve à vaincre le frottement des parties de l'eau; mais comme la matière passe très librement dans les pores de l'Aiguille suivant sa longueur, il n'y a aucune partie de la force employée à porter l'Aiguille vers le Nord, & cette force ne doit tendre qu'à la faire tourner, enforte que ses pores se présentent le plus avantageusement qu'il est

possible au courant de la matiere; ainsi l'Aiguille ne peut avoir que le mouvement de direction.

La seconde objection est prise d'un Mémoire présenté à l'Académie par M. de Créquy, dont l'objet étoit de prouver qu'il y a deux courans de matiere dont les directions sont opposées. Il employe d'abord l'objection à laquelle nous venons de répondre, & qui a été faite plus d'une fois, & il se fert ensuite de l'Expérience suivante. Il a fait faire une Aiguille dont l'un des bouts depuis la chape est de Cuivre, & l'autre est d'Acier; cette Aiguille est par rapport au torrent de matiere magnétique, dans le même cas que si la moitié de Cuivre n'y étoit point, & en effet elle ne sert qu'à faire équilibre à l'autre. M. de Créquy prétend que si l'on touche une pareille Aiguille, en sorte que le bout d'Acier se doive diriger vers le Sud, il est impossible qu'elle s'y dirige en cas que la matiere vienne du Sud, de même qu'une girouette ou une bannière ne dirigera jamais sa pointe vers le côté d'où vient le vent; il dit la même chose à l'égard du Nord, d'où il conclut qu'il y a nécessairement deux courans, dont l'un chasse l'Aiguille vers le Nord, & l'autre vers le Sud. Voilà les raisons & l'exemple sur lequel il se fonde; mais pour peu qu'on y fasse d'attention, on verra que rien n'est si différent que le cas de la girouette & celui de l'Aiguille. Dans le premier, l'effort du vent est continuellement appliqué sur les parties extérieures de la girouette, & la doit pousser par conséquent jusqu'à ce qu'il l'ait pla-

placée dans la direction de son courant. Mais il n'en est pas de même de l'Aiguille, le courant qui l'entraîne, n'agit en aucune façon sur ses parties extérieures; au contraire, la matière pénètre l'intérieur de l'Aiguille, & ce n'est que suivant la direction des parties internes du Fer que le courant doit agir. Nous avons suffisamment établi dans le premier Mémoire, qu'il ne falloit qu'abattre les pointes que l'on suppose dans les pores du Fer, vers celle des extrémités que l'on veut faire diriger vers le Nord. Si l'on tourne l'Aiguille, enforte que les pointes se présentent au courant, il est certain que la matière qui n'agit que sur elles, puisque ce sont ces pointes seules qui résistent à son passage, les heurtera toutes, enforte qu'elle fera tourner l'Aiguille jusqu'à ce qu'elle lui présente le pôle opposé par lequel elle doit entrer. La figure extérieure de l'Aiguille n'y fait rien, & il suffit qu'elle soit mobile; car quand on toucheroit l'Aiguille d'un sens contraire, ce qui renverseroit les pointes vers la chape, il arriveroit encore la même chose, l'Aiguille sera toujours portée par le courant dans le sens que ses pointes seront tournées, & sans que la figure extérieure y entre pour rien, puisque dans aucun cas la force du courant de la matière ne peut y être appliquée: ainsi on voit qu'il n'y a nulle parité entre l'exemple de la girouette & celui de l'Aiguille qui n'a qu'une moitié d'Acier, & que par conséquent l'objection tombe d'elle-même.

On peut ajouter, que quand on voudroit supposer qu'une pareille Aiguille fût absolu-

ment dans le cas de la girouette, il seroit impossible d'expliquer sa direction par le moyen de deux courans; car si une girouette étoit exposée à deux vents, dont les directions fussent précisément opposées, la force de l'un des deux vents seroit supérieure à l'autre, ou elles seroient égales. Dans le premier cas, la girouette seroit certainement entraînée par celui dont la force est la plus grande, & elle sera comme si elle n'étoit exposée qu'à un seul vent, dont la force sera exprimée par l'excès de l'un sur l'autre. Dans le second cas, les deux forces se feront équilibre, & laisseront la girouette indifféremment dans toutes les situations où elle se trouvera. Ainsi le système des deux courans est encore moins favorable que l'autre à l'explication de la direction de l'Aiguille qui n'a qu'un des bouts d'Acier, & nous venons de voir qu'il n'y a nulle difficulté en supposant un seul courant, puisque la matiere n'agit que suivant l'inclinaison des parties intérieures de l'Aiguille auxquelles seules elle est applicable, & nullement suivant sa forme extérieure.

Je ne crois pas qu'il y ait d'autre objection contre l'unité du courant, qui mérite attention. Je ne parle point ici de la déclinaison qui n'a rien de plus difficile dans ce système que dans tous les autres, & qui n'a aucun rapport avec les propriétés de l'Aimant dont j'ai entrepris de parler dans ces deux Mémoires. Pour ne me pas borner dans celui-ci à l'établissement d'un système qui n'est qu'une recherche purement spéculative, je vais ajouter

ter quelques remarques sur la maniere d'aimanter les Aiguilles & les lames de Fer ou d'Acier, & d'armer les Pierres d'Aimant, pour produire l'effet le plus avantageux. Ces Observations tendent toutes à confirmer l'unité du courant, ou du moins elles s'accordent mieux avec ce système qu'avec tout autre.

On peut réduire à deux les différentes manieres de toucher les Aiguilles sur la Pierre d'Aimant. L'une est de les passer sur une des armures de la Pierre, & l'autre de les passer sur toutes deux. Il est certain que la maniere la moins avantageuse est de ne les passer que sur une ; car premierement, pour toucher en cette sorte, il faut que l'Aiguille fasse avec la direction du courant de la matiere un angle assez grand, ce qui fait que les poils ne peuvent pas être couchés bien exactement dans le sens de la longueur de l'Aiguille. En second lieu, le torrent de matiere se trouve nécessairement partagé, parce qu'il y en a une partie qui tend à couler dans l'Aiguille, & le reste à passer dans l'autre pôle de l'Aimant. Enfin l'Aiguille touchée de cette maniere sur le pôle de la Pierre qui se dirige au Sud, sera encore moins aimantée que si on la touche sur l'autre, parce que la matiere sortant par ce dernier, est plus réunie, & a plus de force, comme nous l'avons prouvé au commencement de ce Mémoire. Ces conjectures sont confirmées par l'expérience, & il est aisé à chacun de les vérifier.

L'autre maniere de toucher, est de glisser l'Aiguille sur les deux armures, la tenant parallèle à l'axe de la Pierre, ce qui se peut

encore faire en deux façons, car on verra que rien n'est à négliger dans une matiere aussi susceptible des plus petites délicatesses. On peut retirer l'Aiguille de dessus les armures, en continuant de la glisser d'un bout à l'autre, enforte que la partie qui a d'abord touché un des poles de l'Aimant, vienne ensuite à toucher l'autre. Pour peu qu'on réfléchisse, on verra bien que cette maniere n'est pas la meilleure, puisque le même bout de l'Aiguille qui avoit posé d'abord sur le pole par lequel la matiere sort de la Pierre, & dont les parties seront par conséquent disposées de façon à l'y laisser entrer, venant à passer ensuite sur le pole opposé, la matiere qui entre dans la Pierre par ce pole doit nécessairement détruire une partie de l'arrangement qui s'étoit fait lorsque ce même bout étoit sur l'autre pole de la Pierre.

Il résulte donc de-là, que la meilleure maniere de toucher une Aiguille, est de la poser sur la tête des armures d'un Aimant; & si l'Aiguille est plus longue que l'axe de l'Aimant, on la glissera un peu, enforte que chaque partie de l'Aiguille touche les armures; mais en la retirant, on la détachera parallèlement à l'axe, sans la glisser toute entiere sur les deux poles, parce que, comme nous venons de l'observer, sa vertu diminueroit, si le bout qui a été d'abord sur un des poles venoit à passer sur l'autre. L'expérience confirme parfaitement cette théorie, & l'Acier touché en cette sorte a beaucoup plus de vertu magnétique que des deux pre-
mie-

mieres manieres, qui sont cependant presque les seules qui soient en usage.

Je rapporterai à cette occasion une Expérience qui ne se trouve dans aucun des Auteurs qui sont venus à ma connoissance; c'est que si l'on glisse une Aiguille à la distance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, sans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la glisse du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un instant à quelque distance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction semblable à celle qu'elle auroit, si on la posoit simplement sur les armures de la Pierre, & qu'on la retirât ensuite parallelement à l'axe, & tout opposée à celle qu'elle auroit contractée, si on l'avoit glissée d'un bout à l'autre sur les deux armures de la Pierre.

Il ne faut que jeter les yeux sur la * Figure 3^e. pour voir que tout cela doit arriver ainsi, sur-tout dans le systême d'un seul courant; car, supposé qu'il suive la direction désignée par les petites fleches, on voit que si l'on glisse l'Aiguille, ou qu'on la tienne seulement dans l'étendue du tourbillon OP , les petits poils doivent se coucher du sens que vont les fleches, c'est-à-dire, que la matiere sortira par le bout P , qui par conséquent se dirigera vers le Nord. Il arrivera encore la même chose, si on pose l'Aiguille sur les armures, parce que le cours du tourbillon ne fera que se rapprocher de la Pierre, & la matiere

* Fig. 3.

K 6

tiere passera toujours par l'Aiguille en sortant d'un pole & rentrant dans l'autre ; mais si l'on vient à glisser l'Aiguille sur les armures, il est nécessaire qu'elle prenne une direction opposée, puisque le bout de l'Aiguille qui étoit d'abord sur le pole *N*, vient ensuite sur le pole *M*, & que ce n'est pas de celui qu'il a touché le premier, mais du dernier, qu'il contracte la vertu qu'il conserve dans la suite.

J'ai voulu essayer s'il ne seroit pas possible de déterminer à peu près la vitesse du courant de la matiere magnétique ; mais quoique j'aye fixé un degré de vitesse qu'elle excède de beaucoup, il s'en faut bien encore que je n'aye pu la déterminer au juste ; voici quelle étoit mon idée.

Supposant toujours un seul courant qui circule dans la Pierre, & qui en sortant, va de *N* en *M* ; si je parviens à faire passer une Aiguille en ce sens dans le tourbillon avec autant ou plus de vitesse que n'en a le courant, elle ne doit point s'aimanter, parce qu'alors la matiere ayant une vitesse égale, est comme en repos à l'égard de l'Aiguille, & par conséquent ne peut pas agir sur ses poils, ni les coucher en aucun sens. Pour tâcher d'y parvenir, j'ai ajusté une Aiguille à angles droits à l'extrémité d'une Tringle de bois de deux pieds, attachée par son autre bout à une goupille, enforte que l'extrémité à laquelle étoit l'Aiguille ; pût décrire un arc de cercle ; j'ai lié vers ce bout une corde qui faisoit plusieurs tours sur un tambour de Montre. Ayant disposé le tout sur une planche,

che, lorsque j'amenois vers moi la petite tringle, je bandois le ressort du tambour; venant ensuite à la lâcher subitement, la tringle partoît avec beaucoup de vitesse, & emportoit l'Aiguille, qui par ce moyen traversoit très rapidement le tourbillon d'un Aimant que j'avois disposé à cet effet sur la planche. J'ai recommencé cette Expérience un grand nombre de fois, tantôt faisant aller l'Aiguille dans le sens du courant, tantôt dans le sens opposé, & quoique j'aye cru remarquer qu'elle étoit plus vivement aimantée lorsqu'elle alloit à contre-sens du courant, la différence étoit néanmoins si peu considérable, qu'il en résulte toujours que le mouvement de la matière magnétique est infiniment plus rapide que celui qui peut être causé par le débandement d'un ressort.

Pour aimanter une lame d'Acier, on doit observer les mêmes choses que nous avons dites à l'égard des Aiguilles; on la passera sur les deux armures d'un Aimant, & lorsque le bout par lequel on veut finir sera proche de l'armure, on détachera la lame parallèlement à l'axe de la Pierre; on la frottera cinq ou six fois de la même manière, & elle sera aussi bien aimantée qu'elle peut l'être. Si l'on veut composer un Aimant artificiel avec plusieurs de ces lames, il y a quelques précautions à prendre. A mesure qu'on les aura aimantées, il faut les poser contre une muraille, le bout qui se doit diriger au Nord en en-bas, & les éloigner les unes des autres assez pour que les poles de même nom ne puissent pas se nuire mutuellement. Lors-

qu'elles seront toutes aimantées, on les rassemblera le plus subitement qu'il sera possible, mettant ensemble les poles de même nom, & on les ferrera bien avec les anneaux qui doivent avoir été préparés auparavant. Voilà la maniere qui m'a paru la meilleure pour faire un Aimant artificiel aussi fort & aussi bon qu'il le peut être.

Il y a encore quelque chose à observer sur le choix de la matiere qui se peut le mieux aimer, & je fis quelques remarques à ce sujet, lorsque je travaillois à mon premier Mémoire; car les Expériences qui y sont rapportées, ne réussissent pas à beaucoup près si parfaitement avec une lame d'Acier, & moins encore avec l'Acier trempé. Dans ces deux dernières, les petits poils ne sont pas si flexibles, ni si faciles à renverser que dans le Fer ordinaire, ainsi le seul renversement de la lame, ou des coups légèrement donnés sur une de ses extrémités, ne peuvent en abatre qu'un très petit nombre: mais il doit résulter de cette difficulté, que lorsque les petits poils sont une fois couchés en un même sens, c'est-à-dire, lorsque l'Acier est aimanté, il doit perdre sa vertu plus difficilement; c'est aussi ce que l'expérience nous montre.

Comme les Auteurs varient extrêmement sur ce qui s'aimante le mieux, du Fer, de l'Acier, ou de l'Acier trempé, j'ai voulu m'en assurer par des Expériences exactes, & ayant fait faire quatre lames égales, l'une de Fer, l'autre d'Acier, la troisième d'Acier trempé & la quatrième de Fer fondu, toutes polies, je les ai toutes aimantées de la même man-

niere.

niere. On sent, en les frottant, que celle de Fer s'attache à l'Aimant plus fortement que toutes; celle d'Acier plus que celle d'Acier trempé, & celle de Fer fondu moins que les trois autres. Les présentant à une Aiguille aimantée, la lame d'Acier l'attiroit de bien plus loin que les autres, celle d'Acier trempé l'attiroit de plus loin que celle de Fer fondu, & celle de Fer avoit beaucoup moins de vertu magnétique que toutes les autres; celle d'Acier en avoit le plus, & leur enlevait l'Aiguille, quoiqu'elle en fût plus éloignée. Ces Expériences ne varient point, & l'explication en est facile.

Le Fer s'aimante aisément par la grande souplesse de ses poils, leur mobilité, & la facilité qu'ils ont à être couchés en tout sens; ces propriétés lui font aussi perdre la vertu magnétique avec presque autant de facilité qu'il l'a acquise; c'est ce que nous voyons par le changement de ses poles, lorsqu'on renverse la barre, qu'on la chauffe, qu'on la frappe, &c. c'est ce qui fait aussi qu'ayant été aimanté, ses parties conservent moins l'arrangement qu'elles ont reçu par la présence de l'Aimant. L'Acier, dont les poils sont moins flexibles, s'aimante plus difficilement par le renversement, par les coups; mais lorsqu'en le passant sur un Aimant, ils ont été une fois inclinés & forcés à donner passage à la matière magnétique, ils demeurent bien plus constamment dans cet état, & la même résistance que leur manque de souplesse apportoit à l'arrangement nécessaire
pour

pour être aimantés, s'oppose aussi à leur dérangement.

Si par quelque moyen on pouvoit renverser de la même manière les poils qui sont dans l'Acier trempé, ou dans le Fer fondu, ils conserveroient certainement encore plus de vertu que l'Acier ordinaire : mais leurs parties sont trop inflexibles, & cedent trop difficilement au torrent de matière magnétique ; ils ne s'aimantent donc pas si bien, & acquièrent moins de vertu que l'Acier ordinaire.

Enfin je conclurai de toutes ces considérations & ces Expériences, que les armures & le portant d'un Aimant doivent être de Fer, parce qu'étant toujours proches de l'Aimant, les poils sont facilement retenus dans la même situation, & que se prêtant à toutes les dispositions, il n'y a aucune partie de la force de l'Aimant employée à les y contraindre ; l'Acier dont les parties sont plus de résistance, sera moins bon ; & l'Acier trempé sera encore plus mauvais. Comme c'est à l'expérience à achever de convaincre dans les choses qui en sont susceptibles, je me suis assuré par des épreuves exactes que le raisonnement ne m'avoit point trompé, & ayant fait faire à la même Pierre des armures de Fer, d'Acier & d'Acier trempé, les plus égales qu'il a été possible, j'ai éprouvé que celles de Fer pur & doux étoient les meilleures, & que les moins bonnes étoient celles d'Acier trempé, la même Pierre ayant considérablement moins de force avec ces dernières qu'avec les premières.

Au...

Au reste, s'il y a dans cette opinion quelque hypothese qui paroisse difficile à admettre, c'est l'existence des branches ou poils répandus dans les pores du Fer : mais cela n'est point particulier à mon système ; Descartes, & presque tous les Physiciens après lui, les ont admis ; il est vrai que ce n'est qu'une petite portion du système de Descartes, mais c'est la plus simple, & celle qui a été le moins combattue. Ce n'est certainement pas rendre cette hypothese plus composée, ni moins vraisemblable, que de supposer ces poils assez mobiles pour que leur propre poids, ou des secousses réitérées les abattent vers un des bouts du Fer. C'est cependant la seule supposition dont j'ai besoin pour expliquer un grand nombre d'Expériences : tant anciennes que nouvelles, qui ne l'avoient point été, ou du moins, qui l'avoient été très imparfaitement. Je vais plus loin dans ce second Mémoire, & je déduis de ces Expériences, & de mes explications, l'unité du courant de la matiere magnétique ; mais ce n'est point encore là une supposition trop hardie, ni même une opinion nouvelle : plusieurs Physiciens l'ont admise, à la vérité plutôt par l'embaras qu'ils trouvoient dans le système opposé, que par les preuves qu'ils en ont apportées, car je ne crois pas même qu'aucun ait entrepris de déterminer de quel côté alloit le courant. Je donne donc ici un nouveau jour à cette hypothese, je la fortifie de nouvelles preuves, je réponds aux objections qu'on y a faites, & je détermine que le courant unique de la matiere magnétique

que doit aller du Sud au Nord. On voit que ce n'est point un système nouveau que je hazarde, c'est celui de tous qui est le plus universellement reçu, que je ne fais que débarasser de ce qu'il avoit de plus impliqué, & qui, par l'extrême simplicité à laquelle je le réduis, acquiert un nouveau degré de vraisemblance, & je dirois même quelque chose de plus, s'il étoit permis de se servir en Physique du terme de Démonstration.

*EXAMEN DES LIGNES
DU QUATRIEME ORDRE*

O U

COURBES DU TROISIEME GENRE.

Par M. L'Abbé DE BRAGELONGNE.

ON ne sauroit disconvenir que la connoissance des Lignes courbes ne soit un des objets des plus utiles de la Géométrie. Les progrès que les Anciens firent dans les Mathématiques, après avoir reconnu les propriétés des quatre Sections coniques, en sont des preuves convaincantes. Si ces grands Hommes n'ont pas poussé leurs recherches plus loin, s'ils se sont bornés à quatre ou cinq autres Courbes d'un genre plus élevé que les Sections coniques, ce n'est pas une preuve qu'ils aient cru la connoissance des
Cour-

Courbes plus composées, inutile & infructueuse: il paroît au contraire, qu'ils en ont senti tout le mérite, & qu'ils ont même fait de tems en tems de grands efforts pour y parvenir; mais ils manquoient de secours, je veux dire d'une Méthode qui, portant la lumière dans les routes obscures & inconnues qu'il falloit parcourir, conduisît l'esprit humain sans lui laisser la moindre appréhension de s'égarer.

L'application de l'Algebre à la Géometrie, dont on est redevable au grand génie de M. Descartes; le Calcul de l'Infini, & toutes les nouvelles découvertes qui y ont rapport, dont les illustres Auteurs ont été presque tous Membres de cette Académie, en faisant changer de face au Monde Géometre, lui ont fourni successivement des secours qu'il attendoit depuis si longtems. Enfin un des plus illustres Membres de cette Compagnie * vient de dévoiler ce qui pouvoit rester encore d'inconnu ou de mystérieux dans la théorie des nouvelles Méthodes: en faisant connoître l'Infini dès son origine, en le suivant dans ses différentes modifications, en l'obligeant, pour ainsi dire, de manifester ses effets les plus cachés, il a non seulement affermi les secours que la Géometrie avoit déjà reçus, mais il lui en a encore procuré de nouveaux.

Entreprendre un détail de tous les avantages que la Géometrie a reçu depuis près d'un Siècle, ce seroit m'écarter de mon sujet: ain-

* M. de Fontenelle.

ainfi, en me renfermant dans les bornes que je me fuis prefrites, je me contenterai de rappeler dans la mémoire des Perfonnes qui me font l'honneur de m'entendre, que dès que la Géométrie de M. Descartes eut paru, comme elle apprenoit l'art de renfermer dans une feule Equation les principales propriétés d'une ou de plusieurs Courbes, on s'accoutuma aifément, avec ce grand Homme, à distinguer les Courbes en Géométriques; qu'on a nommées depuis *Courbes algébriques* ou *rationnelles*, & en Méchaniques, qu'on a nommées enfuite *Courbes transcendantes* ou *algébriquement irrationnelles*.

Les premières furent dès-lors distinguées en differens ordres, félon le degré d'élevation auquel leur Equation fe trouve élevée. Cette diftinction eft connue de tout le monde, elle a été adoptée par tous les Géomètres, & perfonne n'ignore aujourd'hui que la Ligne droite eft la feule Ligne du premier ordre, parce qu'elle eft la feule dont l'Equation ne monte qu'au premier degré; que les quatre Sections coniques font les feules Lignes du fécond ordre, parce qu'elles font les feules dont les Equations ne montent qu'au fécond degré.

Il y a cinquante ans qu'on ne connoiffoit qu'un très petit nombre de Lignes du troifieme ordre; les deux Paraboles cubiques, la Cifforde de Dioclès, le *Folium* de M. Descartes, la Paraboloïde du même M. Descartes, & une fixieme Courbe, qu'on peut nommer le *fécond Hyperbolisme parabolique*, étoient, je crois, les feules Lignes du troifieme ordre
dont

dont on eût quelque connoissance, lorsque M. le Chevalier Newton publia son *Enumeration des Lignes du troisieme ordre*, l'un des plus beaux & des plus grands spectacles que la Géometrie eût produit depuis longtems, dans lequel on vit paroître sur la scene soixante & douze Courbes jusqu'alors inconnues aux Savans, à l'exception des six dont on vient de parler.

Le célèbre Géometre Anglois ayant supprimé l'Analyse qui lui avoit ouvert le chemin de cette belle découverte, M. Stirling, autre Géometre de la même Nation, entreprit treize ans après de développer cette Analyse; il en donna les Principes fondamentaux dans un Ouvrage intitulé, *Illustratio Tractatus D. Newtonii de Enumeratione Linearum tertii ordinis*, imprimé à Oxford en 1717, dans lequel l'Auteur, en faisant paroître une grande connoissance de la Géometrie la plus profonde, & une vaste étendue de génie, découvre plusieurs choses curieuses & utiles qui peuvent contribuer infiniment à la théorie des Courbes d'un genre plus élevé.

Enfin M. Nicole a commencé de lire à l'Académie un Traité de ces mêmes Courbes du second genre, ou Lignes du troisieme ordre, dans lequel il répand un nouveau jour sur ce qui fait l'objet de son ouvrage, & le traite avec cette dextérité avec laquelle il manie les matieres les plus épineuses de la Géometrie.

Je ne ferai pas difficulté d'avouer ici que j'ai travaillé quelque tems sur le même sujet, que mon dessein étoit de donner un Traité
com-

complet des Lignes du troisieme ordre, en suivant le plan de celui des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, & d'y ajouter une énumération des Lignes du quatrieme ordre. Ce Traité ne devant plus avoir les agrémens de la nouveauté, après les ouvrages des trois grands Géometres que je viens de nommer, j'ai cru que le seul examen des Lignes du quatrieme ordre, ou Courbes du troisieme genre, étant une matiere toute nouvelle, pourroit être agréable à l'Académie, & de quelque utilité au Public. Je me suis déterminé d'autant plus volontiers à le donner, qu'il m'a paru que pour entendre ce que j'ai à dire sur les figures, les contours, les differens points, les différentes branches, & les autres propriétés des Lignes du quatrieme ordre, il n'est pas absolument nécessaire d'avoir une connoissance parfaite de celles du troisieme, mais qu'il suffit d'en connoître les plus simples, & de savoir seulement l'application de l'Algebre à la Géometrie, & les premiers principes du Calcul différentiel.

Parmi les Courbes dont j'ai à parler dans ce Traité, il y en a quelques-unes, mais en très petit nombre, qui sont connues de tous les Géometres: telles sont trois ou quatre Paraboles & autant d'Hyperboles du quatrieme ordre, dont il est parlé dans differens Ouvrages des Géometres modernes: telle est la Conchoïde de Nicomede, qui est en usage depuis plusieurs Siecles: telle est la Lemniscate de M^{rs}. Bernoulli, ces deux illustres Freres, dont les noms semblent devoir subsister aussi longtems que la Géometrie: telle est

est enfin une espece d'Hyperbole du quatrieme ordre, que M. Stirling a décrit dans l'Ouvrage que j'ai déjà cité.

On a encore quelque chose de plus sur cette matiere, je veux parler du savant Traité de M. Mac-Laurin, Professeur de Mathématique dans le nouveau College d'Aberdeen, & Membre de la Société Royale de Londres, auquel trois Théoremes, publiés par M. Newton à la fin de son Enumeration des Lignes du troisieme ordre, ont donné naissance.

Cet illustre Géometre annonça au Public en 1704 une Méthode pour décrire par un mouvement continu, non seulement les quatre Sections coniques, mais encore toutes Lignes algébriques qui ont ce qu'on appelle des *point doubles*, c'est-à-dire, des points par lesquels la Courbe passe deux fois: M. Newton nommoit particulièrement les Lignes du troisieme & du quatrieme ordre, qui ont des points doubles, mais il se contentoit d'annoncer cette belle Méthode sans en donner la démonstration ni par l'analyse, ni par la synthese. Quelques personnes, pour lesquelles j'avois une extrême déférence, m'engagerent en 1708 à chercher ce que M. Newton avoit jugé à propos de cacher aux yeux du Public: j'eus le bonheur de réussir, & l'on fit imprimer mon Analyse dans le Supplément du Journal des Savans du dernier Septembre 1708. Mais en donnant la démonstration analytique de la Méthode de M. Newton, pour décrire par un mouvement continu les Courbes algébriques qui ont des points doubles, je me contentai de faire voir que par
le

le moyen des deux formules générales, auxquelles se réduisoit ma démonstration, on pouvoit trouver aisément les Equations des Lignes du troisieme & du quatrieme ordre, qui ont des points doubles, & je n'entrai dans aucun détail: les Etudes & les occupations auxquelles j'étois obligé de vaquer par rapport à mon état, ne m'ayant pas laissé le loisir de développer les conséquences de cette Analyse, qui m'auroient fourni la matiere d'un juste volume.

Ce que je n'avois pu exécuter en 1708, l'a été depuis, par M. Mac-Laurin, d'une maniere si avantageuse à la Géometrie, qu'on peut dire qu'elle y a gagné considérablement: car en travaillant sur cette matiere en 1708, je ne pensois qu'à la description des Courbes qui ont des points doubles ou triples, n'ayant alors d'autres vues que de découvrir le secret de M. Newton; au-lieu que M. Mac-Laurin, dans son Traité imprimé à Londres en 1720, sous le titre de *Geometria organica*, s'est attaché non-seulement à donner les démonstrations analytiques des Théoremes de M. Newton, mais encore à imaginer une méthode de décrire par des mouvemens continus les Lignes algébriques qui n'ont pas des points doubles, & principalement celles du troisieme & du quatrieme ordre, ce que M. Newton avoit jugé très difficile à exécuter commodément: *Nam Curvam aliquam, disoit ce grand Géometre, secundum vel tertium generis punctum duplex non habentem commodè describere Problema est inter difficiliora numerandum.*

Ainsi on doit regarder M. Mac-Laurin comme

me le Géometre qui a le plus manié les Lignes du quatrieme ordre, sans cependant avoir eu le dessein de les faire connoître en détail, d'examiner leurs especes particulieres, & de faire remarquer en quoi elles diffèrent les unes des autres: il semble même avoir voulu prévenir sur cela les Lecteurs les moins attentifs; car à la fin de la troisieme Section de sa premiere Partie, après avoir dit que le nombre des Lignes du quatrieme ordre est très considerable, & qu'il y a bien du travail à effuyer pour les faire connoître, il ajoute qu'il y a lieu néanmoins d'espérer qu'elles ne resteront pas inconnues aussi longtems que celles du troisieme ordre, vû le grand nombre d'habiles gens qui s'appliquent aujourd'hui à la Géometrie: *Sed his sæculis, quibus felicissimo virorum doctorum studio artes ac discipline omnes elegantiores ac præsertim Geometria, ad perfectionem summam properare videntur, sperare licet Lineas quarti ordinis non tam diu latere posse extra definitos Geometriæ limites, quam prius latuerunt eæ ordinis proximè inferioris, non ita pridem ab ipso Geometrarum Principe in lucem proditæ.*

J'ai donc cru pouvoir me flater que cet examen des Lignes du quatrieme ordre auroit au moins les agrémens de la nouveauté, & cela avec d'autant plus de raison, que ce Traité n'a nul rapport avec l'Ouvrage de M. Mac-Laurin, ni avec l'Analyse que je donnai en 1708 des Théoremes de M. Newton. En effet, il ne s'agit pas ici d'examiner les Lignes particulieres du quatrieme ordre qui naissent de tel ou tel mouvement continu &

organique ; mais d'aller, pour ainsi dire, chercher les Lignes de cet ordre jusques dans leurs sources , d'en faire connoître les différentes classes & les différentes especes, & ensuite d'en déduire les principales propriétés par le moyen de l'Analyse ordinaire aidée de l'Analyse de l'Infini.

J'aurois souhaité pouvoir abréger cet examen, mais la crainte de devenir obscur, en voulant être court, m'a retenu : outre cela il auroit fallu supprimer quantité de Théorèmes nouveaux, utiles & curieux. Ainsi mon Ouvrage étant beaucoup plus long que ne sont ceux qu'on lit ordinairement dans les Assemblées de l'Académie, je me vois dans la nécessité de le diviser en plusieurs Sections, & les Sections en differens Mémoires propres à être lus dans les Assemblées de l'Académie. La première, qui sera divisée en quatre ou cinq Mémoires, contiendra les Principes fondamentaux de tout l'Ouvrage.

SECTION PREMIERE.

*Principes fondamentaux de l'Examen des Lignes
du quatrieme ordre.*

PREMIER MEMOIRE.

DEFINITIONS ET EXPLICATIONS.

I.

I. **T**outes les Courbes algébriques, de quel que genre qu'elles puissent être, rentrent en elles-

elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini. Celles qui rentrent en elles-mêmes peuvent être appelées *Ovales*, d'un nom générique dont je demande la permission de me servir, quoique quelques-unes de ces Courbes ne ressemblent gueres à des Ovales ordinaires, mais c'est afin de pouvoir les distinguer par un seul mot, de celles qui s'étendent à l'infini. Ces *Ovales* sont ou simples comme l'Ellipse ordinaire, qui est une Ovale du premier genre, ou composées comme sont presque toutes les Lignes du quatrième ordre qui rentrent en elles-mêmes, & parmi ces Ovales composées il y en a qui se nouent en forme de ruban, & on les appelle des *Lemniscates*, nom qui leur a été imposé par les illustres Géomètres de Bâle dont j'ai parlé ci-devant.

I I.

II. Les Courbes qui s'étendent à l'infini, peuvent être nommées par abréviation *Courbes* ou *Lignes infinies*, & parmi celles-ci il y en a que j'appelle *Courbes simples*, & d'autres *Courbes composées*. Les premières sont celles qui n'ont que des branches infinies en nombre pair: les *composées* sont celles qui outre leurs branches infinies, toujours en nombre pair, ont encore des *Ovales* simples ou composées, ou des *Lemniscates*, qui font partie des mêmes Courbes, lesquelles quoique séparées, sur le plan, des branches infinies dont nous venons de parler, ne laissent pas de leur être unies par les liens secrets de l'Equation algébrique qui exprime la nature

de la totalité de la Courbe; ces portions ainfi détachées, sur le plan, des branches infinies de la Courbe à laquelle elles appartiennent, seront nommées ici *Ouales* ou *Lemniscates conjuguées*. Il y a des cas où ces Ouales deviennent infiniment petites, & se réduisent en un point, alors on le nomme par la même raison le *Point conjugué*: dans d'autres cas l'Ovale, au-lieu d'être conjuguée, est unie avec deux des branches infinies de la Courbe, alors on la nomme le *Folium* de cette Courbe, & le point où se fait cette union est dit le *Nœud*, & ce Nœud est toujours un *point double* de la Courbe.

I I I.

III. Les Courbes infinies, soit qu'elles soient simples, soit qu'elles soient composées, sont ou *Paraboliques*, ou *Hyperboliques*, ou *Parabolo hyperboliques*: les premières sont celles dont toutes les branches infinies n'ont point d'*Asymptotes rectilignes*; les secondes, celles dont toutes les branches ont des *Asymptotes rectilignes*; & les dernières, celles dont certaines branches infinies, toujours en nombre pair, n'ont pas d'*Asymptotes rectilignes*, tandis que les autres branches infinies de la même Courbe, aussi en nombre pair, ont des *Asymptotes rectilignes*.

R E M A R Q U E.

IV. Je me fers ici du nom d'*Asymptotes rectilignes*, pour éviter une équivoque qui pourroit

roit causer quelque obscurité dans la suite, si je ne prenois la précaution d'en avertir. Toutes les Courbes qui s'étendent à l'infini, ont toujours des Asymptotes, mais ces Asymptotes sont ou des Lignes courbes ou des Lignes droites, & on en trouve la nature & la position, en réduisant l'équation de la Courbe qu'on examine en une ou plusieurs suites d'autant plus convergentes que l'Abscisse est grande; & cette Méthode, qui est une des plus belles découvertes de ces derniers tems, est d'une très grande utilité pour découvrir les différentes branches infinies des Courbes d'un genre élevé par le moyen des Courbes d'un genre moins élevé, ou au moins plus simple.

Les Branches infinies, dont les Asymptotes sont rectilignes, sont donc nommées *Branches hyperboliques*, & celles qui ont des Asymptotes curvilignes, sont nommées *Branches paraboliques*. Un seul exemple éclaircira ceci: La Paraboloïde de M. Descartes, qui est une Ligne parabolo-hyperbolique du troisieme ordre, est composée, comme tout le monde fait, de quatre branches infinies, dont deux sont hyperboliques, puisqu'elles ont une Ligne droite pour Asymptote, les deux autres sont paraboliques, n'ayant pas d'Asymptotes rectilignes; mais ces deux branches paraboliques ont pour Asymptote une *Parabole conique*, ou Parabole ordinaire; de laquelle elles s'approchent toujours de plus en plus en allant à l'infini, de même que les branches hyperboliques s'approchent toujours

238 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
& à l'infini de la Ligne droite, qui est leur
Asymptote.

DEFINITIONS.

IV.

V. Si l'on tire une ligne AP^* , parallèle à la tangente NT d'une parabole ou d'une hyperbole conique quelconque $MNGm$, dont GH (par exemple) soit l'axe, la courbe $MNGm$, après s'être approchée de la ligne droite AP de M en N , s'éloigne pendant tout le reste de son cours, qui est infini, de la ligne droite AP , en allant de N en G & en m : cela est démontré. Il n'en est pas de même des lignes d'un ordre supérieur: il y en a, qui après s'être approchées de la ligne droite AP † de M en N , s'éloignent de cette même droite, en allant de N en O , & ensuite s'en rapprochent une seconde fois, en allant de O en q , après quoi elles s'éloignent une seconde fois, en allant de q en V , puis s'en rapprochent une troisième fois, & cela à plusieurs reprises, suivant le degré auquel elles sont élevées: c'est ce que l'on voit arriver souvent aux lignes du quatrième ordre; ainsi pour exprimer par un seul mot ces différens contours, je les nomme des *sinuosités*, en sorte que MNO est une sinuosité, NOq est une seconde sinuosité, OqV une troisième sinuosité, & ainsi des autres: d'où il suit que les points N , O , q , seront nommés les sommets des sinuosités, N le

* Fig. 1. † Fig. 2.

le sommet de la première, O le sommet de la seconde, & q le sommet de la troisième.

V.

VI. Lorsqu'une ligne courbe ZMN^* est en partie concave & en partie convexe vers une même ligne droite AP , le point N de cette courbe qui sépare la partie concave de la partie convexe, est nommé, comme tout le monde sait, le *point d'inflexion de la courbe*.

V I.

VII. Par les définitions donnés du *folium* & du *nœud*, il est évident que si le *folium* d'une courbe devient infiniment petit, le nœud de ce *folium* se change en un point que les Géomètres modernes ont nommé *point de rebroussement*. En effet, soit ZM^mDMN^\dagger une courbe foliée quelconque, dans laquelle la droite MD soit ce que je nomme la mesure du *folium*, & M le nœud : il est visible que ce nœud demeurant fixe en M , si la droite MD diminue continuellement jusqu'à devenir infiniment petite, il est visible, dis-je, que le *folium* diminue continuellement jusqu'à devenir infiniment petit, & enfin que tout le *folium* se confond avec le point M , & que la courbe ZM^mDMN prend la figure de la courbe ZMN qui a un point de rebroussement en M^\ddagger . D'où il suit que tout point de rebroussement peut être considéré comme le nœud d'un *folium* infiniment petit.

L 4

AVER-

* Fig. 3. † Fig. 4. ‡ Fig. 5.

A V E R T I S S E M E N T.

Je crois qu'il est à propos d'avertir ici de deux choses. 1°. Que nous nommons point de rebroussement ce que M. Newton & les autres Géomètres Anglois ont nommé cuspis: que ces Géomètres appellent nodus ce que nous nommons le folium, & qu'ils donnent le nom de decussatio au point que nous appellons le nœud. J'ai cru devoir retenir les dénominations qui étoient en usage parmi les Géomètres François avant que M. Newton eût écrit sur cette matière.

2°. Que quoique nous considérons ici le point de rebroussement comme le nœud d'un folium infiniment petit, nous ne prétendons pas dire qu'il ne puisse être considéré que de cette façon, car il est bien certain qu'on peut le regarder comme la réunion de deux points d'inflexion N & M, dont l'intervalle NM* est devenu infiniment petit. En effet soit la parabole campaniforme de M. Newton ZNDMX, dont la nature est exprimée par l'équation $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$ (dans laquelle $DP = x$ & $PZ = y$) il est constant que cette courbe a deux inflexions N & M, qui sont parallèlement à l'ordonnée principale DL; si l'on prend sur cette ordonnée principale la portion $DR = a$ & sur l'axe DP de part & d'autre du point D les portions DB, Db, égales l'une & l'autre à $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, & que par les points B & b on mène les droites BN, bM, parallèles à DL, les points N & M où ces droites seront rencontrées

par

* Fig. 6.

par une autre droite RN , menée parallèlement à l'axe par le point R , & de part & d'autre de ce point; ces points, dis-je, N & M seront les deux points d'inflexion de la courbe $ZNDMX$; mais si l'on suppose maintenant $DR(a) = 0$, il est visible que cette courbe $ZNDMX$ se change en une seconde parabole cubique ZNX^* , puisque son équation $y^3 - 3ayy + 3aay = bxx$, par la supposition de $a = 0$, devient $y^3 = bxx$, qui est celle qui convient à la courbe qu'on nomme seconde parabole cubique, laquelle a un point de rebroussement à son sommet N .

REMARQUES.

VIII. Le rapport entre les abscisses AC † & les ordonnées EC d'une ligne droite quelconque $SEMe$, dont AP est l'axe, étant donné en termes analytiques, il est constant 1°. que si cette droite coupe en m & en M & en tout autre point la courbe ZMN , dont AP soit l'axe, & dont les ordonnées MP soient parallèles aux ordonnées EC de la droite $SEMe$, il est constant, dis-je, que le point d'intersection M étant commun à la droite & à la courbe, l'abscisse AB qui lui correspond est commune à la droite & à la courbe, à cause de l'axe commun AP . Il en est de même de tout autre point d'intersection M de la droite $SEMe$ & de la courbe ZMN , l'abscisse AP qui lui correspond est commune à la droite & à la courbe.

2°. Tous les Géomètres conviennent que
le

* Fig. 7. † Fig. 2.

L 5

le simple point d'attouchement M^* est équivalent à deux points d'interfection infiniment près l'un de l'autre ; ainsi, la droite SM_e étant supposée tangente en M de la courbe ZMN , il est clair que l'abscisse AP est deux fois commune à la droite SM_e & à la courbe ZMN .

3°. Puisqu'il est évident † qu'une tangente SN en un point d'inflexion N † touche & coupe la courbe MN en ce même point N , il est visible qu'en abaissant de ce point N sur l'axe AP l'ordonnée NB , l'abscisse AB correspondante au point d'inflexion, doit être trois fois commune à la droite SN_e & à la courbe MN .

4°. Soit supposée la droite SNM , tangente au point d'inflexion N d'une courbe $ZMNX$ †, & en même tems secante de cette courbe en un autre point M , distant du point d'inflexion de la grandeur NM ; si cette distance NM devient infiniment petite, la droite SNM redevient simple tangente de la courbe au point N §, mais son attouchement est équivalent à quatre points d'interfection, ou à deux points d'attouchement infiniment près l'un de l'autre, & l'inflexion ne paroît plus, quoiqu'elle existe réellement dans un espace infiniment petit, ce qui pourroit faire donner à ces sortes de points le nom d'*inflexion invisible*, ou celui d'*inflexion de la seconde espece*.

5°. Soit supposée la droite SN_2Me , tangente

* Fig. 3.

† Art. 2.

‡ Fig. 2.

‡ Fig. id.

§ Fig. 9.

gente en une inflexion de la seconde espece N d'une courbe $Z_2 M N X$, & en même tems sécante de cette courbe en un autre point $_2 M$, distant du point d'inflexion invisible de la grandeur $_2 M N$; si cette distance $_2 M N$ devient infiniment petite, il est évident que la droite $S N_2 M^*$, de simple tangente qu'elle étoit, redevient tangente & sécante de la courbe $Z N X$ en un même point N , & par conséquent qu'en ce point N il y a une inflexion invisible & une inflexion visible: pour le distinguer des autres points d'inflexions dont on a parlé dans l'Article 6, je le nommerai *inflexion de la troisieme espece*.

6°. Si la droite $S N_3 M^\dagger$ est supposée tangente de la courbe $Z N X$ en une inflexion de la troisieme espece N , & sécante de la même courbe en un autre point $_3 M$, distant de l'inflexion N de la grandeur $_3 M N$; il est clair, que cette distance $_3 M N$ devenant infiniment petite, la droite $S N_3 M$ redevient simple tangente de la courbe au point N^\ddagger , mais son attouchement est équivalent à six points d'intersection infiniment près les uns des autres, en sorte qu'en ce point N il y a consécutivement deux inflexions invisibles dans un espace infiniment petit: pour la distinguer de celle du nombre 4 de cet Article, je la nomme *inflexion de la quatrieme espece*.

7°. On peut s'assurer ainsi que les courbes ont des inflexions de la 5^{me}, 6^{me}, 7^{me} & 8^{me} espece, &c. qui sont alternativement visibles & invisibles; en sorte que toutes les fois qu'un attou-

* Fig. 10.

† Fig. 10.

‡ Fig. 11.

attouchement est équivalent à un nombre d'intersections impair, cet attouchement se fait en une inflexion visible : mais lorsque l'attouchement est équivalent à un nombre d'intersections pair, plus grand que deux, cet attouchement se fait en une inflexion invisible.

C O R O L L A I R E I.

IX. Il suit des nombres 4, 5 & 6 de l'Article précédent, qu'en abaissant des points d'inflexion N^* de la seconde, troisième ou quatrième espèce sur l'axe AP des ordonnées comme NB , il suit ; dis-je, que l'abscisse AB qui en résulte, est 1^o. une abscisse quatre fois commune à la tangente SN & à la courbe XNZ , si le point N est une inflexion de la seconde espèce. 2^o. Que cette abscisse AB est cinq fois commune à la droite & à la courbe, si le point N est une inflexion de la troisième espèce. 3^o. Que cette abscisse AB est six fois commune à la droite & à la courbe, si le point N est une inflexion de la quatrième espèce ; & ainsi des autres inflexions d'espèces supérieures.

C O R O L L A I R E II.

X. Si d'un point simple N^\dagger , ou d'un point d'inflexion N^\ddagger d'espèce quelconque ; on abaisse sur l'ordonnée principale AL une droite NE parallèle à l'axe AB , qui soit sécante

* Fig. 9. 10. & 11. † Fig. 1. ‡ Fig. 9. 10. & 11.

cante de la courbe en N , il est visible que l'abscisse AE n'est qu'une seule fois commune à la sécante BN & à la courbe XN_2MZ , & que l'abscisse AB n'est qu'une seule fois commune à la sécante EN & à la courbe XN_2MZ , soit que le point N soit une inflexion de la première, seconde, troisième & quatrième espèce, ou d'une espèce supérieure.

D E F I N I T I O N S.

V I I.

XI. Lorsqu'une courbe ne passe qu'une seule fois par un point quelconque M du plan sur lequel elle est décrite, ce point, entant qu'il appartient à la courbe, n'est qu'un *point simple*. Ainsi toutes les inflexions visibles & invisibles, soit qu'elles soient de la première, seconde, troisième ou quatrième espèce, &c. ne sont jamais que des points simples.

V I I I.

XII. * Lorsqu'une courbe, soit qu'elle s'étende à l'infini, soit qu'elle rentre en elle-même, passe deux fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M , entant qu'il appartient à la courbe, est un *point double*. Ainsi, 1°. Tous les simples nœuds, ou points d'intersection de deux branches, sont des points doubles. 2°. Puisque le point de rebroussement † peut être pris

* Fig. 4. &c. † Art. 7.

pour le le *nœud* d'un *folium* infiniment petit, il s'ensuit que le rebroussement d'une courbe est un point double. 3°. Le point conjugué n'étant autre chose qu'une ovale infiniment petite, il s'ensuit que le point conjugué doit être mis au rang des points doubles.

I. X.

XIII. Lorsqu'une courbe passe trois fois par le même point *M* du plan sur lequel elle est décrite, ce point *M*, * entant qu'il appartient à la courbe, est un *point triple*. Ainsi, 1°. tous les nœuds d'une courbe par lesquels il passe une troisième branche de la même courbe, sont des points triples. 2°. Le rebroussement d'une courbe étant le nœud d'un *folium* infiniment petit †, il est évident que le rebroussement d'une courbe quelconque devient un point triple, lorsqu'il passe par ce point de rebroussement une troisième branche de la même courbe. 3°. L'ovale infiniment petite étant un point double, lorsqu'une ovale infiniment petite est adhérente à une branche de la courbe, il est évident qu'elle doit former un point triple dans l'endroit où elle est adhérente à la courbe. Cette dernière espèce de point triple sera nommée *point triple invisible*, parce que l'on ne voit point, lorsque la courbe est décrite sur le plan, ce qui cause sa *triplicité*, l'ovale infiniment petite étant, pour ainsi dire, invisible.

X.

* Fig. 12. & 13. † Art. 7.

X.

XIV. Lorsqu'une courbe passe quatre fois par le même point M^* du plan sur lequel elle est décrite, ce point M est nommé *point quadruple*. Si elle passe cinq fois par le même point M du plan sur lequel elle est décrite, ce point M , entant qu'il appartient à la courbe, est nommé *point quintuple*; & ainsi des autres points multiples à l'infini.

X I.

XV. S'il arrive qu'une des branches DMN^\dagger , qui forment en M un point double, a une inflexion en ce même point M , ce point double est nommé *point double de la seconde espece*. Si les deux branches DMN , DMZ^\ddagger , qui forment le point double M , ont l'une & l'autre une inflexion au point M , ce point double est nommé *point double de la troisieme espece*; au-lieu que le point double M^\ddagger , auquel les branches DMN , DMZ , n'ont aucune inflexion, est nommé *point double de la premiere espece*.

X I I.

XVI. Lorsqu'une des trois branches, dont l'intersection forme le point triple, a une inflexion au point M , où se fait cette intersection, ce point triple est nommé *point triple de*

* Fig. 16. † Fig. 14. ‡ Fig. 15. § Fig. 4.

de la seconde espece *. Lorsque deux de ces branches ont chacune une inflexion en M , où se fait l'interfection des trois branches, ce point triple est nommé *point triple de la troisieme espece* †. Enfin lorsque les trois branches, dont l'interfection commune forme le point triple, ont les unes & les autres un point d'inflexion en M , où se fait cette interfection, ce point triple est nommé *point triple de la quatrieme espece* ‡, au-lieu que le point triple M ‡; auquel les branches DMN , DMm , ZMV , n'ont aucune inflexion, est nommé *point triple de la premiere espece*.

S C H O L I E.

XVII. Il est aisé de conclure des définitions précédentes, 1°. Que, parmi les points quadruples, il y a cinq especes d'interfections. *La premiere espece* est lorsque les quatre branches, qui se coupent en M , n'ont aucune inflexion en ce même point M . *La seconde espece* est celle où une seule des quatre branches a une inflexion au point M où se fait l'interfection. *La troisieme espece* est celle où deux des quatre branches ont chacune une inflexion au point même de l'interfection. *La quatrieme espece* est celle où trois branches ont chacune une inflexion précisément au point où se fait l'interfection. Enfin les points quadruples de la cinquieme espece sont ceux où les quatre branches, qui se coupent en M , ont les unes & les autres des in-

* Fig. 17. † Fig. 18. ‡ Fig. 19. § Fig. 20.

inflexions en ce même point M .

2°. On peut connoître aussi facilement ce que c'est qu'un point quintuple; & voir en même tems qu'il y a *six especes* d'intersections parmi les points quintuples, les unes sans inflexions, les autres avec une seule inflexion, les *troisièmes* avec deux inflexions, les *quatrièmes* avec trois inflexions, les *cinquièmes* avec quatre inflexions, & les *sixièmes* avec cinq inflexions.

COROLLAIRE I.

XVIII. Il suit des définitions données des points doubles, triples, quadruples, & des autres points multiples, qu'après avoir mené par un point multiple quelconque M deux sécantes $*MB$, ME , faisant entre elles un angle quelconque BME , & prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent en B & en E des droites, comme AP & AL , prises la première pour l'axe, & la seconde pour l'ordonnée principale de la courbe à laquelle le point multiple M appartient; il suit, dis-je, des définitions précédentes, 1°. Que l'abscisse AB est deux fois commune à la sécante EM & à la courbe $ZMDMN$, & l'abscisse AE aussi deux fois commune à la sécante BM & à la même courbe $ZMDMN$, si le point M est un point double. 2°. Que AB est une abscisse trois fois commune à la sécante EM & à la courbe $NMDM_mZMV$, & AE une abscisse trois fois commune à la sécante BM & à la même courbe $NMDM_mZMV$.

*-Fig. 4. & 5. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. & 39.

il ne sauroit y avoir de tangente: car les tangentes n'étant que des prolongemens de côtés infiniment petits du premier ordre d'une branche de courbe quelconque, si par le point double M d'une courbe $ZNC''Z$ il ne passe aucune branche finie ou infinie de cette courbe $ZNC''Z$, mais seulement une ovale infiniment petite, il est clair qu'il ne sauroit y avoir en ce point M de prolongement d'un côté infiniment petit du premier ordre d'une branche quelconque finie ou infinie, & par conséquent que l'expression générale des soutangentes de la courbe $ZNC''Z$ ne doit fournir que des valeurs imaginaires au point double M , quand ce point double est une ovale infiniment petite.

REMARQUES.

XXI. De-là naît la différence qui est entre les points doubles qui sont formés par l'intersection de deux branches d'une même courbe $ZMDMN$, ceux qui sont formés par le rebroussement M d'une courbe ZMN , & ceux qui sont formés par une ovale infiniment petite, ou point conjugué M d'une courbe $ZNC''Z$; les points d'intersection * ont toujours deux tangentes TM , & tM , faisant entre elles un angle fini TMt : les points de rebroussement † n'en ont qu'une, & les ovales infiniment petites ‡ ou points conjugués M n'en ont que d'imaginaires ‡.

Oa.

* Fig. 4.

† Fig. 20.

‡ Fig. 5.

‡ *Art. précéd.*

On peut voir encore la différence qui est entre les points doubles d'intersection de la première, seconde & troisième espèce. Ceux de la première espèce ^a sont tels que l'abscisse AB n'est que trois fois commune à la courbe $ZMDMN$, & à la tangente TM , aussi bien qu'à cette courbe & à la tangente tM^b . Ceux de la seconde espèce ^c sont tels que l'abscisse AB n'étant que trois fois commune à la courbe & à une des tangentes comme tM , cette même abscisse est quatre fois commune à la même courbe & à l'autre tangente comme TM^d . Les points d'intersection de la troisième espèce ^e sont tels que l'abscisse AB est quatre fois commune à la courbe & aux deux tangentes TM & tM^f .

COROLLAIRE IV.

XXII. Il est visible, 1°. Qu'en un point triple M , formé par l'intersection des trois branches de la courbe $NMDM_mZMV$, il doit y avoir trois tangentes TM , tM , & oM . 2°. Qu'en un point triple M d'une courbe NM_mZMV^b , où il y a un point de rebroussement, il ne sauroit y avoir que deux tangentes TM , tM , puisque les tangentes au point M des branches NM , mM , se confondent en une. 3°. Qu'en un point triple M , formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite sur une branche ZMA^i d'une courbe $VNAMZ$, il ne sauroit y avoir qu'une

^a Fig. 4. ^b Art. 19. n. 1. ^c Fig. 14.
^d Art. id. n. 2. ^e Fig. 25. ^f Art. id. n. 2.
^g Fig. 12. ^h Fig. 33. ⁱ Fig. 40.

qu'une seule tangente TM , les deux autres devenant imaginaires à cause de l'ovale infiniment petite.

R E M A R Q U E S.

XXIII. De-là naît la différence qui est entre un point triple formé par l'interfection de trois branches, le point triple accompagné de rebroussement, & le point triple formé par l'adhésion d'une ovale infiniment petite.

On voit aussi la différence qui est entre les points triples de la première, seconde, troisième & quatrième espèce. Dans les points triples de la première espèce ^a, l'abscisse AB est quatre fois commune à la courbe $NMDM_mZMV$, & à chacune des tangentes TM , ιM , θM , prises séparément ^b.

Dans les points triples de la seconde espèce ^c, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDM_mZMV$ ^d, & à une des trois tangentes comme TM , à cause du point d'inflexion M de la branche DMN , tandis que cette même abscisse AB n'est que quatre fois commune à la courbe $DMNM_mZMV$, & aux deux autres tangentes ιM , θM , prises séparément.

Dans les points triples de la troisième espèce ^e, l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDM_mZMV$, & à deux des tangentes au point M comme TM & ιM , à cause du point d'inflexion M de la bran-

^a Fig. 12. ^b Art. 19. n. 2. ^c Fig. 17.
^d Art. id. n. 3. ^e Fig. 18.

branche DMN , & du point d'inflexion M de la branche DM_m , tandis que cette même abscisse AB n'est que quatre fois commune à la courbe $NMDM_mZMV$, & la troisième tangente θM^* .

Dans les points triples de la quatrième espèce \dagger , l'abscisse AB est cinq fois commune à la courbe $NMDM_mZMV$ & aux trois tangentes $T M$, ιM , θM , puisque chaque branche qui passe par le point triple M , a une inflexion en ce même point $M \dagger$.

A V E R T I S S E M E N T.

De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une Théorie générale pour les autres multiples, tels que sont les points quadruples, quintuples, sextuples, &c. Mais comme les lignes du quatrième ordre dont j'ai à traiter ici, ne sauroient avoir ni points triples de la seconde, troisième & quatrième espèce, ni points quadruples, ni points quintuples; en un mot, comme les lignes du quatrième ordre ne peuvent avoir que des points simples, ou des points doubles de la première, seconde & troisième espèce, ou au plus un seul point triple de la première espèce; je m'abstiens de pousser cette recherche plus loin, persuadé qu'on doit en voir l'enchaînement, & qu'il n'y a personne qui ne puisse déduire toutes les conséquences qui suivent des principes que l'on vient d'établir. Il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire, pour en faire un détail exact.

D E

* Art. id. n. id. † Fig. 19. ‡ Art. id. n. id.

DEFINITIONS.

XIII.

XXIV. Si n est un nombre entier & positif, & qu'on élève une quantité variable & connue x d'abord à l'exposant n , ensuite à l'exposant $n-1$, puis à l'exposant $n-2$, & ainsi de suite jusqu'à l'exposant 0; si l'on unit ces différentes puissances de l'inconnue x les unes aux autres par les signes $+$ ou $-$, en donnant à chaque terme un coefficient constant, mais indéterminé, on formera ce que je nomme *grandeurs complètes du degré n* . Par exemple, n étant $= 2$, si l'on élève la variable x d'abord à l'exposant 2, puis à l'exposant 1, ensuite à l'exposant 0, & qu'on unisse ces trois puissances x^2 , x^1 , x^0 , par les signes $+$ ou $-$, en multipliant le premier terme par le coefficient constant ϵ , le second par le coefficient constant γ , le troisième par le coefficient constant δ , pour avoir $\epsilon x^2 + \gamma x + \delta$, cette formule sera une grandeur complète du second degré; de même la formule $\epsilon x^3 + \eta x^2 + \lambda x + \mu$ est une grandeur complète du troisième degré, & celle-ci $\nu x^4 + \rho x^3 + \pi x^2 + \phi x + \sigma$ est une grandeur complète du quatrième degré, & ainsi de suite, en sorte que $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + Ex^{n-4} + \&c.$ est une grandeur complète du degré n : par la même raison $qx + a$ est une grandeur complète du premier degré, & $x^0 = 1$ est en ce sens une grandeur complète du degré 0.

XXV.

XIV.

XXV. Lorsqu'il manque quelques termes dans les formules précédentes, je les nomme *grandeurs incomplètes de tel ou tel degré*, quand l'occasion se présente d'en parler; ainsi la formule $\varepsilon t^3 + \mu$ & la formule $\varepsilon t^3 + \eta t^2 + \mu$ sont des grandeurs incomplètes du troisième degré, parce qu'il manque à la première les termes ηt^2 & λt , & à la seconde le terme λt .

LEMM E I.

XXVI. Les deux suites marquées ici par (A) & par (B), dont la première est celle des grandeurs complètes de la variable t , qui sont depuis 0 jusqu'à n , & la seconde celle des puissances descendantes depuis n jusqu'à 0, d'une autre variable s ; les deux suites, dis-je, (A) & (B) étant arrangées en ordre, comme on les voit ici,

$$(A) \dots 1, qt + \alpha, \zeta t^2 + \gamma t + \delta, \varepsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu,$$

$$(B) \dots s^n, s^{n-1}, s^{n-2}, s^{n-3}$$

$$\begin{array}{c} t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma, \zeta^2 c. \\ s^{n-4}, \zeta^2 c. \end{array}$$

Si l'on multiplie le premier terme de la suite (A) par le premier terme de la suite (B), le second terme de la suite (A) par le second terme de la suite (B), le troisième terme de la suite (A) par le troisième terme de la suite (B), & ainsi des

Mem. 1730.

M

an-

autres jusqu'à ce que tous les termes soient épuisés, & qu'on unisse tous les produits par les signes + ou -, en faisant la somme totale égale à zero: on aura l'Équation indéterminée marquée ici par (D)

$$(D) \dots s^n + qt + \alpha \times s^{n-2} + \epsilon t^2 + \gamma t + \delta \\ \times s^{n-2} + \epsilon t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^{n-3} + \\ \nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma \times s^{n-4} + \xi \epsilon = 0,$$

dans laquelle il n'y a que deux variables s & t , & dont les termes comprennent tous les produits, qui n'excèdent pas le n^e degré, des puissances descendantes de la variables s & des puissances réciproquement ascendantes de la variable t , qui sont depuis n jusqu'à zero, ces produits multipliés par les coefficients constans $1, q, \alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \iota, \xi$ &c.

Ce que je nomme *puissances descendantes de la variable s* , sont les puissances que l'on voit ici en (R), & ce que je nomme *puissances réciproquement ascendantes de la variable t* , sont celles que l'on voit ici en (P).

$$(R) \dots s^n, s^{n-1}, s^{n-2}, s^{n-3}, s^{n-4}, s^{n-5} \text{ \&c.}$$

$$(P) \dots t^0, t^1, t^2, t^3, t^4, t^5, \text{ \&c.}$$

Les produits de toutes ces puissances descendantes, depuis n jusqu'à 0, & réciproquement ascendantes, sont compris dans le Quarré algébrique que l'on voit ici en (N), dont le premier rang horizontal contient tous les produits de R par t^0 ;

N

Mais il est évident que tous les produits qui composent le Triangle algébrique (M), se trouvent dans l'équation (D) formée par la multiplication des termes des suites A & B qui se correspondent suivant l'exposé de ce Lemme.

$$(D) \dots s^n + q t + a \times s^{n-1} + \epsilon t^2 + \gamma t + \delta \\ \times s^{n-2} + \iota t^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu \times s^{n-3} + \\ \nu t + \xi t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma \times s^{n-4} + \&c. = 0.$$

Car 1^o. Le produit, qui compose la première colonne perpendiculaire du triangle M , se trouve composer le premier terme de l'équation (D). 2^o. Tous les produits de la seconde colonne perpendiculaire du triangle M , sont dans le second terme de l'équation (D). 3^o. Tous les produits de la troisième colonne de M , sont dans le troisième terme de la même équation (D). 4^o. Tous les produits de la quatrième colonne sont dans son quatrième terme, & ainsi de suite. Donc tous les produits des puissances descendantes de s , par les puissances ascendantes de t , qui n'excèdent pas le n^e degré, se trouvent dans l'équation (D) multipliés successivement par les coefficients constants $1, q, a, \epsilon, \gamma, \delta, \iota, \eta, \lambda, \&c.$ Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

XXVII. Il suit de-là que l'équation marquée (D) est toujours du n^e degré, & ne fau-

sauroit être d'un degré supérieur ou inférieur; car 1^o les produits des variables s & t , dont elle est composée, ne sauroient excéder le n^{e} degré (par l'Article précédent), donc elle ne peut être d'un degré supérieur à n ; 2^o parmi les produits des mêmes variables s & t , il y en aura toujours plusieurs qui seront du degré n ; donc elle ne sauroit être d'un degré inférieur à n , donc elle est toujours du n^{e} degré. *G. Q. F. P.*

L E M M E I I.

XXVIII. Si les coefficients $q, a, b, \gamma, \delta, \epsilon, \eta$, &c. de l'équation marquée par (D) dans les deux Articles précédens, portent avec eux leurs signes $+$ ou $-$, & si on les regarde, quoique constans, comme des coefficients indéterminés, c'est-à-dire, indifferens à être de telle ou de telle grandeur constante; je dis que cette équation (D) est de toutes les équations du n^{e} degré, qui n'envelopent que deux inconnues, celle qui est la plus générale.

Toutes les équations imaginables du n^{e} degré, dans lesquelles il n'y a que deux variables, peuvent se rapporter à l'équation (D), si l'on peut comparer tous les termes de ces équations particulières un à un, avec ceux de l'équation (D) qui leur correspondent: or cette comparaison de terme à terme, usitée depuis M. Descartes, qui est le premier qui l'ait mise en pratique, sera toujours possible entre toutes les équations imaginables du n^{e} degré, & celle que l'on a marquée (D) dans les Articles précédens; car, 1^o. Tous les produits

quits possibles des puissances descendantes depuis n jusqu'à 0, de la variable s , & des puissances ascendantes, depuis 0 jusqu'à n de la variable t (à l'exception néanmoins de ceux qui sont d'un degré plus élevé que la grandeur n) se rencontrent dans l'équation (D); cela est évident par l'Article 26. Or les termes dont les équations particulières du degré n sont composées, ne peuvent être, quant à leurs variables, que des produits des puissances descendantes d'une variable comme s & des puissances ascendantes d'une autre variable comme t , qui n'excèdent point le n^e degré. Donc tous les termes, de ces équations particulières du n^e degré, auront leurs semblables dans l'équation (D), quant à leurs grandeurs variables. Donc, par rapport à ces variables, ils pourront être comparés avec les termes de l'équation (D). 2^o. Il en sera de même par rapport aux grandeurs constantes qui multiplieront les termes des équations particulières: car les coefficients $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$, &c. de l'équation (D) étant indifférens à recevoir les signes $+$ ou $-$, & en même tems indéterminés à être de telle ou telle grandeur, peuvent être comparés un à un avec les coefficients déterminés des équations particulières. Donc tous les termes des équations particulières du degré n peuvent être comparées, soit par rapport à leurs quantités variables, soit par rapport à leurs quantités constantes, avec les termes de l'équation (D), suivant la méthode de comparaison si usitée dans l'Analyse. Donc toutes les équations particulières du degré n , dans lesquelles

quelles il n'y a que deux inconnues, peuvent se rapporter à l'équation (D). Donc cette équation est de toutes les équations du n^{e} degré, qui ne renferment que deux variables, celle qui est la plus générale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

XXIX. Donc, 1^o. l'équation marquée ici par (1 D) est de toutes les équations indéterminées du premier degré, qui ne renferment que deux inconnues, celle qui est la plus générale, & à laquelle toutes les autres peuvent se rapporter.

$$(1 D) \dots s' + \overline{qt + axs} = 0.$$

2^o. L'équation marquée (2 D) est de toutes les équations du second degré, qui n'ont que deux variables, celle qui est la plus générale.

$$(2 D) \dots s^2 + \overline{qt + axs} + \overline{cs^2 + \gamma t + \delta xs} = 0.$$

3^o. L'équation marquée (3 D) est de toutes les équations du troisième degré, qui ne renferment que deux variables ou inconnues, celle qui est la plus générale.

$$(3 D) \dots s^3 + \overline{qt + axs} + \overline{cs^2 + \gamma t + \delta xs} + \overline{as^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu xs} = 0.$$

4^o. L'équation marquée ici par (4 D) est de toutes les équations indéterminées du quatrième degré, qui n'ont que deux inconnues variables, celle qui est la plus générale.

$$(4 D) \dots s^4 + \overline{qt + axs} + \overline{cs^2 + \gamma t + \delta xs} + \overline{as^3 + \eta t^2 + \lambda t + \mu xs} + \overline{\nu t^4 + \rho t^3 + \pi t^2 + \phi t + \sigma xs} = 0.$$

M 4

5^o. L'é.

5°. L'équation marquée (5 D) est de toutes les équations indéterminées du cinquième degré, celle qui est la plus générale.

$$(5 D) \dots s^5 + qz + a \times s^4 + 6z^2 + \gamma z + \delta \times s^3 + \frac{zt^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu \times s^2 + \nu z^4 + \epsilon z^3 + \pi z^2 + \phi z + \sigma}{\times s^4 + A z^5 + B z^4 + C z^3 + D z^2 + E z + F \times s} = 0.$$

Tout cela est une suite nécessaire du Lemme précédent, & de l'Article 26, lesquels donneront pareillement les Equations générales pour les 6^e, 7^e, 8^e & 9^e degrés, & enfin pour tel degré qu'on voudra.

COROLLAIRE I I.

XXX. Il suit encore du Lemme précédent, que l'équation marquée (D) exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^e ordre.

$$(D) \dots s^n + qz + a \times s^{n-1} + 6z^2 + \gamma z + \delta \times s^{n-2} + \frac{zt^3 + \eta z^2 + \lambda z + \mu \times s^{n-3} + \nu z^4 + \epsilon z^3 + \pi z^2 + \phi z + \sigma \times s^{n-4} + \&c.}{\times s^{n-4} + \&c.} = 0$$

Car il n'y a point de ligne particulière du n^e ordre, dont la nature ne puisse être exprimée par une équation du n^e degré: or il n'y a point d'équation du n^e degré qui ne puisse se rapporter à l'équation (D) *. Donc il n'y a point de ligne particulière du n^e ordre, dont la nature ne puisse se rapporter à l'équation (D)

* Article 23.

(D); donc cette équation exprime en général la nature de toutes les lignes algébriques du n^{e} degré.

COROLLAIRE III.

XXXI. Donc l'équation marquée (4D) exprime la nature de toutes les lignes algébriques du quatrième ordre.

$$(4D) \dots s^4 + qz + u \times s^3 + \overline{6t^2 + \gamma z + \delta \times s^2 + \epsilon z^2 + \eta z^2 + \lambda z + \mu \times s + \nu z^4 + \zeta z^3 + \pi z^2 + \phi z + \sigma} = 0.$$

C'est une suite nécessaire du Lemme second & du Corollaire précédent *; & il est inutile d'ajouter qu'on aura de même les Equations générales pour les Lignes du 5^{me}, 6^{me}, 7^{me} & 8^{me} ordre, & enfin pour tel ordre qu'on voudra, d'autant que cela se déduit trop clairement des Art. 28 & 29.

REMARQUE.

XXXII. Il est aisé de s'appercevoir, 1^o. Que le nombre des termes des Equations générales marquées par (1D), (2D), (3D), (4D), (5D), &c. de l'Article 29, suit la progression marquée ici par (MM)

$$(MM) \dots \overline{1+2}, \overline{1+2+3}, \overline{1+2+3+4}, \overline{1+2+3+4+5}, \overline{1+2+3+4+5+6}, \overline{1+2+3+4+5+6+7}, \&c.$$

Enforte que la première équation (1D), qui

* Art. 30.

qui est pour les lignes du premier ordre, est composée de trois termes; la seconde ($2 D$), qui est pour les lignes du second ordre, est composée de six termes; la troisieme ($3 D$), qui est pour les lignes du troisieme ordre, est composée de dix termes; la quatrieme ($4 D$) est composée de quinze termes, & ainsi des autres à l'infini. 2°. Quela progression (MM) est la suite des nombres triangulaires, en commençant par le second. D'où il suit que n étant pris pour le nombre qui exprime le degré d'une Equation générale quelconque, le nombre triangulaire, qui correspond dans le Triangle arithmétique de M. Pascal au nombre naturel $n + 2$, donne toujours le nombre des termes qui doit être dans l'Equation générale d'une ligne du n^e ordre lorsqu'elle est complete. Or on fait que le nombre triangulaire, qui correspond au nombre naturel $n + 2$, est égal à $\frac{n+2 \cdot n+1}{2}$; donc

cette quantité $\frac{n+2 \cdot n+1}{2}$ exprime toujours le nombre des termes de l'Equation générale des lignes du n^e ordre, lorsqu'elle est complete. 3°. Il est aisé de voir que le nombre des coefficients q, a, c, n, d, e , &c. dans chaque Equation générale, est égal au nombre des termes de l'équation moins un (puisque nous n'en avons point donné jusqu'ici au premier terme); d'où il suit que le nombre des coefficients de l'Equation générale des lignes du n^e ordre est $\frac{n+2 \cdot n+1}{2} - 1 = \frac{nn+3n}{2}$.

Ce que M. Stirling a remarqué avant nous, page 4 de son Traité, imprimé à Oxford en 1717.

PROPOSITION I.

THEOREME.

XXXIII. Une ligne du n^{e} ordre peut être rencontrée par une ligne droite en autant de points qu'il y a d'unités dans n ; & ne le sauroit être, par la même droite, en un plus grand nombre.

DEMONSTRATION.

Soit sur un plan une ligne $ZMMNX_2mV^*$ de l'ordre n , dont l'axe soit GQ , & une ligne droite GM qui coupe la ligne ZMm en un point comme M : je dis que cette droite peut couper la ligne ZMm en autant d'autres points $2M, 3M, 4M, 5M$, &c. qu'il y a d'unités dans $n-1$, c'est-à-dire, en autant de points qu'il y a d'unités dans n , en y comprenant le point M .

Car ayant pris sur GQ la partie $GI =$ à l'unité arbitraire, & après avoir mené du point I la droite IK , faisant avec l'axe GQ un angle quelconque KIG ; l'angle KGI étant connu par la supposition, on voit qu'il y a dans le triangle IKG deux angles & un côté GI qui sont connus; donc les deux autres côtés IK & KG seront connus. Donc après avoir pris $GI = 1$, on peut encore

$M-6$

pren-

* Fig. 216

prendre $IK = b$, quantité connue & déterminée. Donc le rapport des ordonnées de la droite GM aux abscisses GQ (en nommant y ces ordonnées) sera $y = bs$.

Mais la courbe ZMm étant du n^e ordre, le rapport de ses ordonnées MQ (s) aux abscisses GQ (z) de son axe est exprimé par l'équation (D) *

$$(D) \dots s^n + qs + a \times s^{n-1} + \epsilon s^2 + \gamma s + \delta \times s^{n-2} + \iota s^3 + \eta s^2 + \lambda s + \mu \times s^{n-3} + \nu s^4 + \xi s^3 + \pi s^2 + \phi s + \sigma \times s^{n-4} + \&c. = 0$$

dans laquelle les coefficients $q, a, \epsilon, \gamma, \delta, \iota, \&c.$ sont des grandeurs constantes, mais indéterminées à être de telle ou telle valeur, & à être affectées de tel ou tel signe.

Or toutes les fois que la droite GM rencontrera la courbe ZMm , les ordonnées (y) de cette droite QM deviendront égales aux ordonnées QM de la courbe ZMm , par conséquent on aura $QM(s) = y = bs$; & en substituant dans l'équation (D) au lieu de (s) cette valeur bs (pour avoir la valeur des abscisses GQ (z) dans les endroits où la droite GM rencontre la courbe ZMm), on aura l'égalité marquée ici par (K), dont les racines donneront les valeurs des abscisses GQ aux points où la droite GM & la courbe ZMm se rencontrent.

(K),

* Art. 27. & 28.

$$(K) \left\{ \begin{array}{l} +b^{n-1} \\ +qb^{n-2} \\ +eb^{n-3} \\ +ib^{n-4} \\ +\frac{1}{2}b^{n-4} \\ +\&c. \end{array} \right\} x^n \left\{ \begin{array}{l} +ab^{n-1} \\ +\frac{1}{2}b^{n-2} \\ +\frac{1}{4}b^{n-3} \\ +\frac{1}{8}b^{n-4} \\ +\&c. \end{array} \right\} x^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} +db^{n-2} \\ +\frac{1}{2}b^{n-3} \\ +\frac{1}{4}b^{n-4} \\ +\&c. \end{array} \right\} x^{n-2} \left\{ \begin{array}{l} +fb^{n-3} \\ +\frac{1}{2}b^{n-4} \\ +\&c. \end{array} \right\} x^{n-3} + \&c. = 0.$$

Or il est visible qu'il peut y avoir dans cette égalité autant de racines réelles qu'il y a d'unités dans l'exposant n du premier terme, sans qu'il puisse y en avoir un plus grand nombre; donc il peut y avoir autant d'abscisses GQ , G_2Q , G_3Q , G_4Q , &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMm , qu'il y a d'unités dans n , & si ne sauroit y en avoir davantage. Donc la ligne droite GM peut couper la courbe ZMm du n^e ordre en autant de points qu'il y a d'unités dans n , & ne sauroit la couper en un plus grand nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E I.

XXXIV. Donc, 1^o. les lignes du second ordre, c'est-à-dire, les sections coniques, peuvent être rencontrées en deux points par une même ligne droite,

sans pouvoir l'être en un plus grand nombre, ce que l'on fait d'ailleurs être vrai.

2°. Les lignes du troisieme ordre peuvent être rencontrées en trois points par une même ligne droite, sans pouvoir l'être en un plus grand nombre de points.

3°. Les lignes du quatrieme ordre peuvent être rencontrées en quatre points par une même ligne droite, & ne sauroient l'être en un plus grand nombre.

4°. Celles du cinquieme ordre peuvent être rencontrées en cinq points par une même ligne droite; celles du sixieme ordre en six points, celles du septieme en sept points, & ainsi des autres à l'infini.

C O R O L L A I R E I I.

XXXV. Si par un point M simple *, double, triple, quadruple, &c. d'une ligne quelconque ZMN , on a mené une droite MG tangente de la courbe en ce point M , laquelle étant prolongée ait été rencontrée en G sous un angle connu MGQ par une autre droite GQ , sur laquelle on ait abaissé de tous les points M, N, Z , de la courbe ZMN , des droites paralleles entre elles comme MQ, NQ , &c. faisant avec GQ des angles connus MGQ : Il est visible,

1°. Qu'en nommant les abscisses $GQ(s)$ & les ordonnées QM ou $QN(s)$, le rapport des abscisses aux ordonnées sera exprimé en général par l'équation $(D) \dagger$, supposé

* Fig. 22.

† Art. 301

se que la courbe soit une ligne algébrique du 1^{er} ordre.

$$(D) \dots i^2 + q i + a x \dots + c i^2 + r i + d x \dots + i^3 + n i^2 + \lambda i + \mu$$

$$x \dots + i^3 + q i^2 + r i^2 + \phi i + \sigma x \dots + \&c. = 0.$$

2^o. Il n'est pas moins évident que GI étant prise pour l'unité arbitraire, & IK ligne droite connue (puisque dans le triangle IGK il y a deux angles IGK , KGI , & un côté IG qui sont donnés) IK , dis-je, étant nommée b , l'égalité marquée par (K) donnera les valeurs des abscisses GQ , G_2Q , &c. communes à la droite GM & à la courbe ZMN , aux points où cette droite rencontre la courbe.

$$(K) \left\{ \begin{array}{l} + b^n \\ + q b^{n-1} \\ + r b^{n-2} \\ + s b^{n-3} \\ + t b^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} i^n \left\{ \begin{array}{l} + a b^{n-1} \\ + r b^{n-2} \\ + n b^{n-3} \\ + p b^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} i^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} + s b^{n-2} \\ + n b^{n-3} \\ + \&c. \end{array} \right\} i^{n-2} \left\{ \begin{array}{l} + \mu b^{n-3} \\ + q b^{n-4} \\ + \&c. \end{array} \right\} i^{n-4} + \&c. = 0.$$

3°. Il est certain aussi * qu'il y aura dans cette égalité au moins deux racines égales, puisqu'on a supposé la droite GM tangente en M de la courbe ZMN : si le point touchant M de la courbe est une inflexion de la seconde espece, il y aura, dans l'égalité (K) quatre racines égales entre elles † ; si au point touchant M il y a une inflexion de la quatrième espece, l'égalité (K) aura six racines égales : & ainsi des autres points d'inflexion invisibles à l'infini.

4°. Si le point touchant M est une inflexion ordinaire, il y aura ‡, dans l'égalité marquée par (K) , trois racines égales : si le point d'inflexion est de la troisième espece, il y aura cinq racines égales dans l'égalité (K) ; si ce point d'inflexion est de la cinquieme espece, il y aura dans l'égalité (K) sept racines égales, & ainsi des autres points d'inflexion visibles d'especes supérieures.

5°. Si le point touchant M est un point double de la première espece, il y aura § dans l'égalité marquée par (K) trois racines égales & de même signe : si la branche touchée par la droite GM est accompagnée d'une inflexion de la seconde espece au point double M , il y aura dans l'égalité (K) cinq racines égales & de même signe : si l'inflexion est de la quatrième espece, il y aura sept racines égales & de même signe, & ainsi des autres points d'inflexion invisibles à l'infini qui se confondroient avec un point double.

6°. Si

* *Art. 8. n. 2.*

† *Art. id. n. 4.*

‡ *Art. id. n. 3.*

§ *Art. 19. n. 1.*

6°. Si le point touchant M est un point double de la seconde ou troisieme espece, il y aura * dans l'égalité marquée par (K) quatre racines égales & de même signe; supposé que l'inflexion de la branche touchée par la droite GM soit une inflexion de la premiere espece. Si cette inflexion est de la troisieme espece; il y aura dans l'égalité marquée par (K) six racines égales entre elles: & ainsi des autres points d'inflexion visibles d'especes supérieures qui se confondent avec des points doubles.

7°. Si le point touchant M est un point triple de la premiere espece, il y aura † dans l'égalité (K) quatre racines égales & de même signe, six, huit, dix, &c. si ce point triple est accompagné d'une inflexion invisible de la branche touchée par la droite GM . Si la branche touchée par la droite GM a une inflexion visible au point triple M , c'est-à-dire, si le point triple M est de la seconde, troisieme ou quatrieme espece, l'égalité (K) aura cinq, sept ou neuf racines égales & de même signe, selon que cette inflexion, qui se confond avec le point triple M , sera de la premiere, troisieme ou cinquieme espece.

8°. Si le point touchant M est un point quadruple de la premiere espece, il y aura ‡ dans l'égalité marquée par (K) au moins cinq racines égales & de même signe; ou sept, ou neuf, ou onze, selon que le point touchant M sera sans inflexion, ou avec une inflexion de la seconde, quatrieme, ou sixieme

* Art. id. n. 2. † Art. 19. n. 2. ‡ Art. id. n. 3.

me espece, & ainsi de suite pour les autres inflexions invisibles qui pourroient accompagner le point quadruple; si le point touchant M est un point quadruple accompagné d'un inflexion visible de la branche touchée par GM , c'est-à-dire, si le point quadruple M est de la seconde, troisieme, quatrieme, ou cinquieme espece, il y aura dans l'égalité marquée par (K) au moins six racines égales & de même signe, ou huit, ou dix, ou douze, si l'inflexion qui se trouve au point quadruple est de la troisieme, cinquieme, ou septieme espece.

Enfin il est aisé de voir combien il doit y avoir de racines égales & de même signes dans l'égalité marquée par (K) , lorsque le point touchant M est un point quintuple, sextuple, & ainsi des autres points multiples d'un ordre supérieur.

COROLLAIRE III.

XXXVI. De tout ceci il est aisé de conclure, 1°. Que les lignes du second ordre ne sauroient avoir ni points d'inflexion, ni points doubles: car quand la ligne ZMN est du second ordre, l'égalité (K) est du second degré; d'où il suit qu'elle ne sauroit avoir trois racines égales. 2°. Que les lignes du second ordre n'ont ni points triples, ni points quadruples, en un mot, que tous leurs points sont simples. *C'est une vérité connue depuis longtemps, mais que j'ai cru devoir remettre devant les yeux pour faire voir la liaison de cette théorie avec les vérités déjà connues.*

COROLLAIRE IV.

XXXVII. Il suit encore de l'Art. 35, 1^o. Que les lignes du troisieme ordre peuvent avoir des points d'inflexion de la premiere espece, & des points doubles de la premiere espece, & par conséquent des points de rebroussement & des points conjugués : mais qu'elles ne sauroient avoir ni inflexions de la seconde, troisieme ou quatrieme espece, ni points doubles de la seconde & troisieme espece, ni points triples, ni aucuns points multiples au-dessus du point double. 2^o. Que les lignes du quatrieme ordre peuvent avoir des points d'inflexion de la premiere & seconde espece, des points doubles de toutes les especes, & des points triples de la premiere espece : mais qu'elles ne sauroient avoir ni points triples de la seconde, troisieme ou quatrieme espece, ni point quadruple, ni aucun point multiple supérieur au point triple. 3^o. Que les lignes du cinquieme ordre peuvent avoir des points quadruples de la premiere espece, des points triples de la seconde, troisieme & quatrieme espece, & à plus forte raison des points triples de la premiere espece, des points doubles des trois especes que nous avons marquées, & des inflexions de la premiere, seconde & troisieme espece : mais qu'elles ne sauroient avoir ni points quadruples de la seconde, troisieme, quatrieme ou cinquieme espece, ni points quintuples, ni aucun point multiple supérieur au point quadruple de la premiere espece. 4^o. Que

4°. Que les lignes du sixieme ordre peuvent avoir des points quintuples de la premiere espece, ou des points quadruples de la seconde, troisieme, quatrieme & cinquieme espece, & à plus forte raison des points quadruples de la premiere espece, des points triples & des points doubles de toutes les especes. 5°. Enfin que les lignes de l'ordre exprimé par l'exposant n peuvent avoir des inflexions dont l'espece soit exprimée par $n-2$; à plus forte raison de celles dont l'espece est exprimée par $n-3$, $n-4$, $n-5$, &c. Qu'elles peuvent avoir des points multiples dont la multiplicité est exprimée par $n-1$, mais seulement de la premiere espece: qu'elles peuvent avoir de toutes les especes de points multiples, dont la multiplicité est exprimée par $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. mais qu'elles ne sauroient avoir de points multiples dont la multiplicité soit exprimée par n .

COROLLAIRE V.

XXXVIII. Il n'est pas moins évident que les lignes algébriques de l'ordre n peuvent être coupées par leurs tangentes en un point simple M , ou par leurs sécantes en un point double, en autant de points simples, autres que le point d'attouchement, ou autres que le point double, en autant de points, dis-je, qu'il y a d'unités dans $n-2$. Ainsi 1°. les lignes du second ordre, ou les sections coniques, ne sauroient être coupées par leurs tangentes en aucun point, vérité connue depuis longtems. 2°. Les tangentes en un point simple,

Simple, ou les sécantes en un point double des lignes du troisieme ordre, peuvent couper leurs courbes en un autre point. 3°. Les tangentes en un point simple, ou les sécantes en un point double des lignes du quatrieme ordre, peuvent couper leurs courbes en deux autres points simples, ou en un autre point double. D'où il suit que les lignes du quatrieme ordre peuvent avoir deux points doubles sur la même ligne droite sécante de la courbe à l'un & à l'autre point double.

COROLLAIRE VI.

XXXIX. Les lignes algébriques du n^e ordre peuvent être coupées par leurs asymptotes rectilignes en autant de points qu'il y a d'unités dans $n - 2$; c'est encore une suite de l'Art. 35. Ainsi 1°. Les asymptotes rectilignes des lignes du troisieme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en un seul point; Celles des lignes du quatrieme ordre ne peuvent couper leur courbe qu'en deux points; Celles des lignes du cinquieme en trois points; Celles du fixieme en quatre, & ainsi de suite. 2°. Les lignes du quatrieme ordre peuvent être touchées en un point simplement simple, ou coupées en un point double par leurs asymptotes rectilignes; Celles du cinquieme ordre peuvent être touchées en un point d'inflexion de la premiere espece, ou en un point double, ou bien coupées en un point triple par leurs asymptotes rectilignes; Celles du fixieme ordre peuvent être touchées en un point d'inflexion de la seconde espece, ou en un point triple, ou coupées en un point qua-

quadruple par leurs asymptotes rectilignes; & ainsi des autres.

C O R O L L A I R E V I I.

XL. Il suit encore des Articles 33 & 35, que les tangentes en un point d'inflexion de la premiere espece, ou les tangentes en un point double de la premiere espece, ou les sécantes en un point triple des lignes algébriques du n^e ordre peuvent couper leurs courbes en autant d'autres points differens du point d'inflexion, ou du point double, ou du point triple, qu'il y a d'unités dans $n-3$. D'où il suit, 1^o. Que les tangentes au point d'inflexion, ou au point double d'une ligne du troisieme ordre, ne sauroient rencontrer cette ligne en d'autres points. 2^o. Que les tangentes au point d'inflexion, ou au point double de la premiere espece, ou bien les sécantes au point triple d'une ligne du quatrieme ordre, ne peuvent que couper cette ligne en un autre point simple, sans pouvoir la toucher en un autre point simplement simple, ni la couper en un autre point double, ni lui être asymptote. 3^o. Que les tangentes au point d'inflexion de la premiere espece, ou les tangentes au point double de la premiere espece, ou les sécantes en un point triple des lignes du cinquieme ordre, peuvent couper leur courbe en deux autres points simples, ou en un autre point double, ou la toucher en un autre point simplement simple.

COROLLAIRE VIII.

XLI. Il suit encore des mêmes Articles 33 & 35, que la tangente à l'inflexion de la seconde espece, & les tangentes en un point double de la seconde ou troisieme espece, ou bien les tangentes en un point triple, ou enfin les sécantes en un point quadruple des lignes algébriques du n^{e} ordre, ne peuvent couper leur courbe qu'en autant d'autres points qu'il y a d'unités dans $n-4$. D'où il suit 1°. Que la tangente à l'inflexion de la seconde espece, ou les tangentes en un point double de la seconde & troisieme espece, ou bien les tangentes en un point triple des lignes du quatrieme ordre, ne sauroient rencontrer leur courbe en aucun autre point. 2°. Que la tangente à l'inflexion de la seconde espece, ou les tangentes en un point double de la seconde & troisieme espece, ou les tangentes en un point triple, ou les sécantes en un point quadruple des lignes du cinquieme ordre, peuvent couper leur courbe en un autre point simple. 3°. Que les tangentes en ces differens points des lignes du fixieme ordre peuvent couper leur courbe en deux autres points simples, ou en un autre point double, ou les toucher en un autre point simplement simple.

COROLLAIRE IX.

XLII. Il n'est pas moins évident que les lignes du troisieme ordre ne sauroient avoir qu'un

qu'un seul point double. Car soient M & N ces deux points doubles d'une ligne du troisieme ordre: par les premiers principes de la Géometrie, ces deux points peuvent être unis par une même ligne droite MN . Soit prolongée cette droite, jusqu'à ce qu'elle rencontre en G une autre droite GQ , que l'on prendra pour l'axe de la courbe: cela fait, de chaque point double M & N , on abaissera sur cet axe les ordonnées MQ , NP , alors l'abscisse GQ fera au moins deux fois commune à la courbe ZMN & à la droite GN ; de même l'abscisse GP fera au moins deux fois commune à la même courbe ZMN & à la même droite GN , en sorte que dans l'égalité marquée par (K) dans l'Art. 33, il y aura deux racines égales pour l'abscisse GQ , & deux autres racines égales pour l'abscisse GP . Donc il y aura quatre racines dans l'égalité marquée par (K): or il implique qu'il y ait quatre racines dans cette égalité, lorsque la courbe ZMN n'est qu'une ligne du troisieme ordre (puisque cette égalité n'est alors que du troisieme degré, & y étant $=3$). Donc il implique qu'il y ait deux points doubles dans une même ligne du troisieme ordre. Donc, &c.

COROLLAIRE X.

XLIII. Une ligne du quatrieme ordre ne sauroit avoir qu'un seul point triple; car s'il étoit possible qu'elle en eût deux, on prouveroit, par un raisonnement semblable à celui de l'Article précédent, que l'égalité marquée

quée par (K) dans l'Art. 33, pourroit avoir six racines, lorsque la courbe, dont GM est sécante, n'est que du quatrième ordre, ce qui impliqueroit contradiction, puisque l'égalité (K) ne sauroit être alors du quatrième degré. Donc, &c.

COROLLAIRE XI.

XLIV. On prouvera de même que les lignes du quatrième ordre qui ont un point triple, ne sauroient avoir de points doubles; car si cela étoit possible, il s'ensuivroit que l'égalité marquée par (K) dans l'Art. 33, auroit cinq racines, ce qui impliqueroit contradiction, puisque cette égalité ne sauroit être que du quatrième degré, lorsque la courbe n'est qu'une ligne du quatrième ordre.

SCHOLIES.

XLV. Il sera aussi aisé de prouver, 1°. Que les lignes du 5^{me} ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quadruple, & que celles qui ont un point quadruple ne sauroient avoir ni points triples, ni points doubles. 2°. Que les lignes du sixième ordre ne peuvent avoir qu'un seul point quintuple, & que celles qui ont un point quintuple ne sauroient avoir ni points quadruples, ni points triples, ni points doubles. 3°. Enfin que les lignes algébriques de l'ordre n , ne peuvent avoir qu'un seul point multiple, dont la multiplicité soit exprimée par $n-1$; & que celles qui ont un point multiple, dont la multiplicité est exprimée par $n-1$, ne
Mem. 1730. N sau-

fauroient avoir d'autres points multiples.

Enfin, suivant la même théorie, on prouvera encore, 1°. Que les lignes du cinquième ordre, qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 2°. Que les lignes du sixième ordre, qui ont des points quadruples, peuvent avoir des points doubles, & ne fauroient avoir de points triples; mais que celles de cet ordre qui ont des points triples, peuvent avoir des points doubles. 3°. Que les lignes du septième ordre, qui ont des points quintuples, peuvent avoir des points doubles, & ne fauroient avoir ni points quadruples, ni points triples. 4°. Enfin que les lignes du n^{e} ordre, qui ont des points multiples de l'ordre $n-2$, ne peuvent avoir que des points doubles: que les lignes de l'ordre n qui ont des points multiples, dont la multiplicité est exprimée par $n-3$, ne peuvent avoir que des points triples & des points doubles: que celles de cet ordre qui ont des points multiples de l'ordre $n-4$, ne peuvent avoir que des points quadruples, ou des points triples, ou des points doubles; & ainsi des autres à l'infini, tous les autres points de ces courbes étant des points simples.

R E M A R Q U E.

XLVI. Les différentes tangentes, en ces points doubles, triples, quadruples, &c. se trouvent toujours par la méthode des Tangentes que M. le Marquis de l'Hôpital a expliquée dans l'Analyse des Infiniment-petits; mais

mais il faut y appliquer les règles de différentiation contenues dans l'Article 163 de cette même Analyse, dans un Mémoire du célèbre M. Bernoulli, imprimé dans les Journaux de Leipfik de l'année 1704, & dans différens Ouvrages d'un des principaux Géomètres * de cette Compagnie, imprimés, les uns dans les Journaux des Savans, les autres dans les Mémoires de l'Académie, pour les cas auxquels le numérateur & le dénominateur de la fraction qui exprime le rapport de l'ordonnée à la soutangente deviennent nuls: car cela arrive, lorsque le point, dont on cherche la tangente, est double, triple, quadruple, &c. & l'on est obligé de différentier deux fois selon ces méthodes, pour trouver le rapport de l'ordonnée à la soutangente, lorsque le point est double: trois fois, lorsqu'il est triple: quatre fois, lorsqu'il est quadruple, & ainsi de suite pour les autres points multiples. M. de Fontenelle en a donné la raison dans son excellent Traité de la Géométrie de l'Infini, Art. 1266 & 1267; & on peut même la déduire des principes qui ont été établis dans ce Mémoire: ainsi je me contente de renvoyer aux Ouvrages des Géomètres dont je viens de parler.

PROPOSITION II.

THEOREME.

XLVII. *Les lignes algébriques du 2^e ordre †,*
pen-

* M. Sangin.

† Fig. 21.
 N 2

peuvent être coupées par une ligne droite, parallèle à leur axe, en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable (t) qui dénote les abscisses GQ de son axe GS ; & par une ligne droite QM parallèle à son ordonnée principale GL , en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de la variable (s) qui dénote les abscisses GE de cette ordonnée principale GL .

Cette Proposition se démontre de la même manière que celle de l'Article 33, & on en déduit aisément les mêmes conséquences: ainsi je ne m'y arrête pas davantage, pour ne pas tomber dans des répétitions.

DEFINITION XV.

XLVIII. Je nommerai dans la suite *racine double*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à deux racines de cette égalité: telle est la racine $(-a)$ dans l'égalité du troisième degré $x^3 + 4axx + 5a^2x + 2a^3 = 0$; & *racine simple*, celle qui dans une égalité quelconque n'est point répétée: telle est la racine $(-2a)$ dans cette même égalité du troisième degré. Je nommerai *racine triple*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à trois racines de cette même égalité: telle est la racine $(-a)$ dans l'égalité $x^4 + 5ax^3 + 9a^2xx + 7a^3x + 2a^4 = 0$. De même je nommerai *racine quadruple*, celle qui dans une égalité quelconque est équivalente à quatre racines de cette même égalité; & ainsi des autres racines multiples à l'infini.

R E.

REMARQUE.

XLIX. Si par un point quelconque M d'une ligne $ZMDMN$, &c. * de l'ordre n , dont la nature est exprimée par l'équation générale de l'Art. 30, marquée par $(D) \dagger$, on mene deux droites QM, EM , la première parallèle à l'ordonnée principale GL , la seconde parallèle à l'axe GQ , l'une & l'autre prolongées à l'infini, s'il est nécessaire, de part & d'autre du point M , & qui rencontrent, la première l'axe GQ en Q , la seconde l'ordonnée principale GL en L : cela fait, si l'on nomme la droite, prise à discrétion, $GQ(R)$, & la droite QM ou $GE(g)$, si l'on substitue 10. dans l'équation marquée par (D) , au-lieu de l'indéterminée (t) , la valeur (R) , il est visible qu'on aura l'égalité marquée par $(L) \ddagger$, dont les racines donneront les points $M, 3N, 2N, N$, &c. où la droite QM coupe la courbe $ZMDMNX_{2mV}$. 20. Si l'on substitue dans cette même équation, marquée par (D) , au-lieu de l'indéterminée (t) , la valeur $GE = g$, il est constant qu'on aura l'égalité marquée par $(A) \S$, dont les racines donneront les points $M, m, 2m, 3m, 4m, 5m$, &c. où la droite EM rencontre la courbe $ZMDMNX_{2mV}$.

Il est constant aussi que l'abscisse $GQ(R)$ sera une des racines réelles de l'égalité marquée

* Fig. 21. 35. &c 36.

† Voyez la Table à la fin de ce Mémoire.

‡ V. la même Table. § V. la même Table.

quée par (A), & que l'abscisse GE (g) sera une des racines réelles de l'égalité marquée par (L), si le point M est un des points de la courbe $ZMDMNX_2mV$, comme on l'a supposé.

Si l'on a besoin de transporter l'origine des abscisses de G en M , il est constant, par les premiers principes de l'application de l'Algebre à la Géometrie, qu'il n'y a qu'à supposer $z = t - R$ & $u = s - g$, ou bien $t = z + R$ & $s = u + g$: car en substituant ces valeurs de z & de s dans l'équation de la courbe marquée par (D), on aura une équation semblable à celle que l'on voit dans la Table, marquée par (Δ), dans laquelle les coefficients Q, A, B, C, D, E, F, G , &c. seront donnés en q, a, b, c, d, e, f, g , &c. & en g & en R . Or il est visible que cette dernière équation exprime encore la nature de la courbe $ZMDMNX_2mV$ par rapport à des coordonnées MP, PM , qui ont leur origine commune en M , & qui sont paralleles aux premières GQ, QM .

Si par les points G & M on mène la droite GM , il est évident, par l'Art. 33, que cette droite peut rencontrer la courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant n , en y comprenant les points doubles pour deux points simples, les points triples pour trois points simples, & ainsi des autres points multiples. Cela supposé, si l'on prend $GI = 1$ & $IK = b$ (en supposant toujours IK parallele aux ordonnées) on trouvera l'égalité marquée dans la Table par ($2K$) de même qu'on a trouvé ci-devant

* l'é.

* l'égalité marquée par (K): mais à cause des triangles semblables $G'IK$, GQM , on aura ici $b = \frac{g}{R}$; de plus, puisque les coefficients $Q, A, B, C; D, E, F$, &c. sont donnés en $q, a, c, \gamma, \delta, e$, &c. & en g & en R , & que g & R sont donnés de même en $q, a, c, \gamma, \delta, e$, &c. il est visible qu'il n'y aura dans l'égalité ($2K$) aucun coefficient qui ne soit connu par rapport aux coefficients de l'équation primitive marquée par (D).

Maintenant si par le point M , on mène une droite M'' , faisant avec MP un angle quelconque αMP , mais différent de l'angle connu MGQ , cette droite pourra encore rencontrer la courbe $ZMDMNX_{2m}V$ en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant n , en y comprenant les points doubles pour deux points simples, les points triples pour trois points simples, & ainsi des autres. Cela posé, si l'on prend $M' = GI = 1$, & si l'on nomme l la droite l' parallèle aux ordonnées $P; M$, il est visible que de même qu'on a trouvé dans les Art. 33 & 35, l'égalité marquée par (K). on trouvera ici l'égalité marquée dans la Table par ($3K$), dont les racines réelles donneront les points d'intersection de la courbe & de la droite M'' .

Les choses étant telles qu'on vient de les exposer, il est visible que dans les égalités marquées par ($2K$) & par ($3K$), il y aura un certain nombre de racines réelles éga-
les

* Art. 33.

les à zero, selon que le point M fera ou un point simple, ou un point multiple, puisque l'origine des coordonnées MP (z) P_5M (u) est en M .

COROLLAIRE I.

L. Il suit de la Remarque précédente, & de tout ce qu'on a dit jusqu'ici, 1°. Que le point M n'est qu'un point simple de la courbe $ZMNX_2MV$, lorsque l'une des deux racines $GQ(R)$ * ou $GE(g)$ est une racine simple, la première de l'égalité (A), la seconde de l'égalité marquée par (L), ce qui est connu de tout le monde. 2°. Que la droite QM † est tangente, & la droite EM sécante de la courbe au point M , lorsque $GE(g)$ est une racine double de l'égalité marquée par (L), tandis que $GQ(R)$ n'exprime qu'une racine simple de l'égalité marquée par (A). 3°. Qu'au point M de la courbe ZMV ‡, il y a une inflexion parallèle à l'ordonnée principale GL , lorsque $GE(g)$ est une racine triple de l'égalité (L), tandis que $GQ(R)$ n'est qu'une racine simple de l'égalité (A). 4°. Qu'au point M de la courbe ZMV ‡, il y a une inflexion de la seconde espèce à laquelle QM est tangente, lorsque $GE(g)$ est une racine quadruple de l'égalité (L), tandis que $GQ(R)$ n'est qu'une racine simple de l'égalité (A). 5°. Enfin, il est évident que quand $GQ(R)$ n'exprime qu'un

* Voyez la Table à la fin de ce Mémoire.

† Fig. 21. bis. ‡ Fig. 22. bis. § Fig. 21. bis.

qu'une racine simple de l'égalité marquée par (A) , tandis que $GE(g)$ exprime une racine multiple quelconque de l'égalité (L) , il est, dis-je, évident que le point M n'est qu'un point simple de la courbe ZMV , ou sans inflexion ou avec inflexion visible ou invisible: quand la racine multiple $GE(g)$ est impaire, le point M est avec une inflexion visible; quand elle est paire, il est avec une inflexion invisible.

COROLLAIRE II.

LI. Il suit encore de tout ce qui a été dit jusqu'ici, que le point M est un point double, quand $GQ(R)$ * exprime une racine double de l'égalité (A) , tandis que $GE(g)$ exprime une racine double ou plus que double de l'égalité (L) . 1°. Si $GE(g)$ n'est qu'une racine double, les droites EM & QM sont sécantes au point double M †. 2°. Si $GE(g)$ est une racine triple, la droite EM demeurant sécante au point double M , la droite QM est tangente de la courbe en ce même point double M ‡. 3°. Si $GE(g)$ est une racine quadruple, le point double M est de la seconde ou troisième espèce, & la droite QM est tangente en M de la branche qui a une inflexion au point double M §. 4°. Si $GE(g)$ est une racine quintuple de l'égalité (R) , $GQ(R)$ n'étant toujours qu'une racine double de l'égalité (A) , le point double M est

* V. la Table à la fin de ce Mémoire.

† Fig. 25. & 26.

‡ Fig. 27.

§ Fig. 28.

est de la premiere espece, mais la branche à laquelle QM est tangente en M , a une inflexion de la seconde espece en ce même point double M^* , & ainsi des autres.

R E M A R Q U E.

LII. Les points doubles de la premiere espece, dont on a parlé dans l'Article précédent, peuvent être sans rebroussement ou avec rebroussement, ou bien ils peuvent n'être que des ovales infiniment petites. Après s'être assuré par le Corollaire précédent que le point M est un point double la premiere espece, on connoitra si ce point double est ou un point d'interfection, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite, en cherchant les tangentes de la courbe en ce point par la méthode de l'Analyse des Infiniment-petits, jointe aux remarques dont M^{rs}. Bernoulli, Saurin & de Fontenelle l'ont enrichie: car la seconde differentiation de l'équation de la courbe marquée par (*D*)

donnera une double valeur réelle de $\frac{dy}{dx}$

(c'est-à-dire, un double rapport réel de l'élément de l'ordonnée à l'élément de l'abscisse), si le point double M est un point d'interfection; au-lieu que cette seconde differentiation ne donnera qu'une seule valeur de $\frac{dy}{dx}$, si le point M est un point de rebroussement, parce

ce que les deux tangentes au point double M tomberont alors exactement l'une sur l'autre*. Enfin cette seconde différentiation ne donnera que des valeurs imaginaires de $\frac{dy}{dx}$, si le

point double M est un^e ovale infiniment petite, parce qu'une ovale infiniment petite ne sauroit avoir de tangentes†. Il n'y a personne qui ne puisse éprouver, par des exemples connus, la vérité de cette règle : ainsi, sans m'arrêter à en donner ici des exemples qui seront assez fréquens dans la suite de ce Traité, je vais continuer cette Théorie.

COROLLAIRE III.

LIII. Il suit encore de tout ce qu'on a dit jusqu'ici, 1°. Que quand $GQ(R) \dagger$ & $GE()$ sont l'une & l'autre des racines triples, la première de l'égalité (A), la seconde de l'égalité (L), il suit, dis-je, que le point M est ou un point double auquel QM & EM sont tangentes, ou un point triple auquel QM & EM sont sécantes. Dans cette circonstance, il est visible ‡ qu'on connoitra si le point M est double ou triple par le moyen de l'égalité marquée ($2K$) : car si le point M n'est qu'un point double, l'égalité marquée par ($2K$) n'aura que deux racines égales à zero; s'il est triple, elle en aura trois.

* Art. 20. & 21. † Art. id.

‡ V. la Table à la suite de Mémoire, & les Fig. 29. & 30.

§ Art. 49.

trois. 2°. L'abscisse GQ (R) étant toujours une racine triple de l'égalité (A), si GE (g) est une racine quadruple, quintuple, sextuple, &c. & que l'égalité ($2K$) n'ait que deux racines égales à zero, le point M * n'est toujours qu'un point double, mais tel que la branche à laquelle QM est tangente a toujours une inflexion visible ou invisible précisément au point M où se fait l'intersection des deux branches. 3°. L'abscisse GQ (R) étant toujours une racine triple de l'égalité (A), & GE (g) une racine quadruple, quintuple, sextuple, &c. de l'égalité (L), si l'égalité ($2K$) † a trois racines égales à zero, le point multiple M est toujours un point triple, auquel EM & GM sont sécantes, tandis que QM est tangente d'une branche qui n'a point d'inflexion, si GE (g) est une racine quadruple : ou qui a une inflexion de la première espèce en M ‡, si GE (g) est une racine quintuple : ou une inflexion de la seconde espèce en M §, si GE (g) est une racine sextuple ; & ainsi de suite.

R E M A R Q U E.

LIV. Après s'être assuré, par le Corollaire précédent, que le point M est un point triple, on connoitra si ce point triplé est une intersection de trois branches de la courbe, ou s'il est accompagné d'un rebroussement, ou s'il est produit par l'adhésion d'une ovale

* Fig. 31. & 29.

† Fig. 32.

‡ Fig. 33.

§ Fig. 34.

le infiniment petite sur une des branches de la courbe, en différentiant trois fois (selon les méthodes de M^{rs}. Bernoulli & Saurin) l'équation qui exprime la nature de la courbe: car la troisième différentiation donnera trois

valeurs de $\frac{ds}{dt}$, c'est-à-dire, trois valeurs

réelles du rapport de l'ordonnée QM à la soutangente, si le point est un point d'intersection de trois branches, puisqu'il y a trois tangentes réelles au point M^* ; mais des

trois valeurs réelles de $\frac{ds}{dt}$, il y en aura deux

égales entre elles, si le point triple M est accompagné de rebroussement, puisqu'il doit y avoir alors deux des trois tangentes qui tombent exactement l'une sur l'autre †; enfin la troisième différentiation ne donnera qu'une seule valeur réelle & deux valeurs imagi-

naires de $\frac{ds}{dt}$, si le point triple M est pro-

duit par l'adhésion d'une ovale infiniment petite, puisque dans cette dernière circonstance il ne doit y avoir qu'une seule tangente réelle au point triple M , les deux autres devenant imaginaires ‡.

COROLLAIRE IV.

LV. Il suit encore de tout ce qui a été dit ci-dessus: Que quand $GQ(R)$ & $GE(g)$

* Art. 22. & 23.

† Art. 22. & 23.

‡ Art. id.

(g)^a sont l'une & l'autre des racines quadruples, la premiere de l'égalité (A), la seconde de l'égalité (L), il suit, dis-je, que le point M est 1°. ou un point double de la troisieme espece^b, auquel QM & EM sont tangentes, ou 2°. un point triple^c auquel QM & EM sont tangentes, ou 3°. un point quadruple auquel QM & EM sont sécantes^d. Dans ces circonstances il est visible que ce sont les égalités ($2K$) & ($3K$) qui doivent déterminer la nature du point multiple M ; car si l'égalité ($2K$) n'a que deux racines égales à zero, il est clair que le point M n'est qu'un point double de la troisieme espece; si cette égalité ($2K$) a trois racines égales à zero, le point M est un point triple; mais si l'égalité ($2K$) a quatre racines égales à zero, le point M peut être, ou un point triple^e, auquel GM seroit tangente, aussi-bien que les droites QM , EM ; ou bien un point quadruple^f auquel GM seroit sécante, aussi-bien que les deux autres droites QM , EM . Dans cette dernière circonstance, si l'égalité ($3K$) a trois racines égales à zero, le point M n'est qu'un point triple; si elle a quatre racines égales à zero, c'est un point quadruple auquel QM , EM , GM & M ^g sont sécantes; si l'égalité ($3K$) a cinq racines égales à zero, le point multiple M est encore un point quadruple auquel QM , EM & GM sont sécantes, tandis que M ^g est la tangente

^a V. la Table à la fin de ce Mémoire.

^b Fig. 37. ^c Fig. 38. ^d Fig. 39.

^e Fig. 36. ^f Fig. 35.

te d'une des branches qui produisent le point quadruple: si l'égalité marquée par $(3K)$ a six racines égales à zero, ou sept, ou huit, ou neuf, &c. le point multiple M est toujours un point quadruple auquel QM , EM & GM sont sécantes, & M tangente, mais la branche à laquelle M est tangente a une inflexion visible ou invisible précisément au point M où se fait l'intersection, & c'est une inflexion visible, si les racines de l'égalité $(3K)$ qui sont égales à zero, sont au nombre de six, huit, dix, douze, &c. & c'est une inflexion invisible, si ces égalités sont en nombres impairs, sept, neuf, onze, &c.

S C H O L I E.

LVI. De tout ce qui vient d'être dit, il est aisé de déduire une théorie générale pour connoître si un point donné M d'une ligne algébrique donnée $ZMNX, mV$ est 1°. un point simple, double, triple, quadruple, quintuple, &c. 2°. De quelle espece de multiplicité il est: s'il est double de la premiere, seconde ou troisieme espece: s'il est triple de la premiere, seconde, troisieme ou quatrieme espece: s'il est quadruple de la premiere, seconde, troisieme, quatrieme ou cinquieme espece: & ainsi des autres points multiples à l'infini. 3°. Si c'est un nœud, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite; si outre le nœud, il y a un point de rebroussement de deux autres branches, ou s'il y a une ovale infiniment petite adhérente; & ainsi des autres. Mais comme

me les lignes du quatrieme ordre, dont j'ai à traiter ici, ne sauroient avoir ni points triples de la seconde & troisieme espece, ni points quadruples, ni points quintuples: en un mot, comme les lignes du quatrieme ordre ne peuvent avoir que des points doubles de toutes les especes, ou au plus un seul point triple, je m'abstiens de pousser cette théorie plus loin, persuadé qu'on doit en voir l'enchainement, & qu'il n'y a personne qui ne puisse déduire, des principes qui viennent d'être établis, toutes les conséquences qui peuvent servir à cette théorie. Il faudroit allonger extrêmement ce Mémoire pour en faire le détail: cependant avant de le finir, je crois qu'il est à propos de faire quelques remarques au sujet des points multiples invisibles du premier & du second genre, c'est-à-dire, au sujet des ovales infiniment petites conjuguées, & des ovales infiniment petites adhérentes à une des branches de la courbe.

REMARQUE I.

LVII. On a dit dans la 8^e. définition * nombre 3, que l'ovale infiniment petite ou point conjugué devoit être mis au rang des points doubles. Le célèbre Chevalier Newton l'a dit aussi dans son Enumération des lignes du troisieme ordre, & c'est après ce grand homme que j'ai cru pouvoir le supposer. Néanmoins ayant donné des règles dans ce Mémoire, pour reconnoître les points doubles d'avec
les

les points simples & les autres points multiples, & pour connoître ces points doubles les uns des autres, j'ai cru qu'on ne me feroit pas mauvais gré, si, par maniere de digression, je fais voir l'application de ces règles au point conjugué, ou ovale infiniment petite, sur un exemple déjà connu.

E X E M P L E.

LVIII. * On demande si la courbe, dont la nature est exprimé par cette équation $pyy - 2cpy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & quelle est la nature de ce point double, si c'est un point d'intersection de deux branches, un point de rebroussement, ou si c'est un point conjugué (l'indéterminée (x) représente les abscisses AP , & l'indéterminée (y) les ordonnées PZ de cette courbe).

1^o. Quand $AP(x) = a$, il reste l'égalité $pyy - 2cpy + pcc = 0$, dont les deux racines sont $y = c$, $y = c$; & cette valeur de l'indéterminée (y) étant substituée dans l'équation de la courbe, il vient l'égalité $x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3 = 0$, qui a trois racines réelles, dont deux sont égales entre elles, & de même signe, ces deux racines égales sont $x = a$, $x = a$. Or (par l'Art. 51) quand les égalités désignées par (L) & par (A), (qui sont ici les égalités $pyy - 2cpy + pcc = 0$, & $x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3 = 0$) ont l'une & l'autre deux racines réelles, égales & de même

* Fig. 20.

même figure, la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation (D), qui dans cet exemple particulier est réduite à l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, a un point double, & à ce point double, l'abscisse $AP (x)$ est à l'ordonnée $PZ (y) :: a : c$; donc, si l'on prend $AB = a$, & sur la droite BM , parallèle à l'ordonnée principale GL , la partie $BM = c$, le point M sera le point double de la courbe, dont la nature est exprimée par l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$. *Ce qu'il falloit montrer en premier lieu.*

2°. Pour connoître maintenant la nature de ce point double M , c'est-à-dire, s'il est un point d'interfection, ou un point de rebroussement, ou une ovale infiniment petite * ; on différentiera deux fois l'équation $pyy - 2pcy + pcc = x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3$, suivant l'Art. 163 de l'Analyse des Infiniment-petits, & les méthodes de M. Bernoulli, & la seconde différentiation donnera $pdy^2 = 3xdx^2$

$- 4adxdx^2$, d'où l'on tire $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3x - 4a}{p}$, &

ensuite $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm \sqrt{3x - 4a}}{\sqrt{p}}$. Mais au point

double M , on a $x = a$ † : Donc, en ce point

double M , on a $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm \sqrt{-a}}{\sqrt{p}}$. Or $\sqrt{-a}$ est

un grandeur imaginaire; donc au point double

* Art 52.

† Par le nombre précédent du présent Article.

ble M , les tangentes de la courbe sont imaginaires, quoique les coordonnées GB , BM soient réelles: donc * ce point double M est une ovale infiniment petite, ou un point conjugué. En effet cette courbe est celle qui, dans l'énumération des lignes du troisieme ordre de $M. Newton$, est la 69. espece, que ce célèbre Géometre dit avoir un point conjugué. J'ai préféré cet exemple, quoique connu, & pris parmi les lignes du troisieme ordre, afin de faire voir la liaison de mes principes, avec les vérités qui ont été publiées par d'autres.

REMARQUE II.

LIX. On a dit dans la neuvieme définition †, que l'ovale infiniment petite conjuguée, étant un point double, lorsqu'une ovale infiniment petite, au lieu d'être conjuguée, est adhérente à une des branches de la courbe, elle doit former un point triple dans l'endroit où elle est adhérente à la courbe: & on l'a nommée *point triple invisible*, par la raison que l'on ne voit pas, lorsque la courbe est décrite sur le plan, ce qui cause la triplicité de ce point qui n'est sensible que dans l'équation de la courbe. Je ne crois pas que personne ait jamais parlé de ces especes de points triples, c'est ce qui m'engage à m'entendre un peu sur leur formation.

Cette singularité, qui ne se rencontre pas dans les lignes qui sont au dessous du quatrieme ordre, vient de ce que les lignes du quatri-

* Art. 20. & 21. † Art. 13.

300 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

trieme ordre & celles d'un ordre supérieur peuvent avoir sur une même branche finie ou infinie $AMmZ^*$, une ovale $M\phi m\delta$ coupée par cette branche en deux points M & m . Cette ovale, qu'on peut nommer *ovale adhérente*, fait partie de la courbe à laquelle elle est adhérente, & les points M & m , où elle est coupée par la branche finie ou infinie $AMmZ$, sont les points doubles de la courbe $ZmM\delta N\gamma XV$ à laquelle elle appartient, dont on suppose ici que GZ est l'axe, & GL l'ordonnée principale.

Soit δ le point de l'ovale adhérente où la tangente est parallèle à l'axe: ϕ le point de cette même ovale où la tangente est parallèle à l'ordonnée principale GL , en sorte que la droite $Z\delta$ soit le *maximum* de l'ovale, parallèle à l'ordonnée principale, & la droite $E\phi$ son *maximum* parallèle à l'axe: soit de plus la droite indéfinie GM menée par les points G & M , il est constant que cette droite GM doit couper l'ovale, non seulement au point M , mais encore en un autre point comme γ , puisque cette ovale est une portion de courbe rentrante en elle-même.

Si l'on conçoit maintenant que les droites $M\delta$ & $M\phi$ deviennent infiniment petites, il est constant que les points M & δ , M & ϕ , seront infiniment près l'un de l'autre, aussi bien que les points M & m & les point M & γ : en un mot il est clair que l'ovale sera infiniment petite, & qu'elle n'occupera plus sur la branche $AMmZ$ qu'un espace infiniment

pe-

petit, enforte qu'elle fera invisible sur le plan.

Néanmoins la droite $Q\delta$ coupera toujours la courbe & au point M où est le nœud, & au point δ qui sera infiniment près de M : de même $E\phi$ coupera la courbe & au point double M & au point simple ϕ , qui sera infiniment près de M . D'où il suit 1°. que la droite GE (g) sera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (L)*, favoir à deux racines égales à cause du nœud M , & à une troisième racine qui ne différera des autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\delta = E\epsilon$, c'est-à-dire, qui dans le fini n'en différera point. Par la même raison la droite GQ (R) sera équivalente à trois racines égales de l'égalité marquée par (A)†, dont deux seront correspondantes au nœud M , & la troisième au point ϕ , laquelle par conséquent ne différera des deux autres que d'une quantité infiniment petite égale à $M\phi = Q\eta$, c'est-à-dire, qu'elle n'en différera point dans le fini, enforte qu'il y aura dans l'égalité (A) trois racines parfaitement égales.

Enfin si l'on transporte l'origine des coordonnées de G en M pour avoir, au-lieu de l'équation qui se rapporte à l'équation générale marquée par (D), celle qui se rapportera à l'équation générale marqué par (Δ)‡, & que de cette dernière équation on en déduise, suivant ce qui est dit ci-dessus, l'éga-

* Art. 49. Voyez la Table. † Art. id.

‡ Art. id. V. la Table.

l'égalité marquée par $(2K)^*$, dont les racines donnent les points d'intersection de la courbe $ZmM + NnXV$ & de la droite GM . il est clair que cette égalité $(2K)$ aura trois racines égales à zero; savoir deux, à cause du point double M , où la droite GM coupe la courbe, & une troisième, à cause du point γ qui n'est distant de M , origine des x & des z , que d'une grandeur infiniment petite.

Ainsi, dans les lignes du quatrième ordre, ou d'un ordre supérieur au quatrième, qui ont des ovals infiniment petites adhérentes à une de leurs branches, les équations algébriques, qui expriment la nature de ces courbes, doivent faire connoître l'existence & la situation de ces ovals par des symptômes, s'il est permis de parler ainsi, pareils à ceux des courbes qui ont des points triples, dont la triplicité dépend de l'intersection de trois branches finies ou infinies de la même courbe : ce que j'avois à faire remarquer ici, pour ne laisser aucun doute sur la neuvième Définition.

E X E M P L E.

LX. Soit la courbe $ZmMANnXV$ †, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par le chiffre (1)

$$(1). ay^3 - 3acy^2 - acy^2 + 3acxy + 2acxy - ac^3 - ac^3 \\ = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}bx^3 + \frac{1}{2}abx^2 + \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{2}bx^3 \\ - \frac{1}{2}ax^3$$

dans

* *Art. id.* † *Fig. 17*

dans laquelle on suppose $c = \frac{b\sqrt{a^2+10a}}{2\sqrt{2a}}$ & $a > b$.

La droite GQ , qui s'étend à l'infini de part & d'autre du point G , est l'axe de la courbe sur laquelle on prend les x positifs du côté de Q , & les x négatifs du côté de B : la droite GL , qui coupe GQ à angle quelconque au point G , est l'ordonnée principale de la courbe, ou l'axe des y : l'origine de ces indéterminées x & y est en G .

Cette courbe n'a que deux branches qui s'étendent à l'infini de part & d'autre de la droite GL , & ces deux branches se réunissent en A , où la courbe coupe l'ordonnée principale GL parallèlement à l'axe GQ : la branche $ZmMA$, qui s'étend à l'infini du côté des x positifs, est chargée d'une ovale $M\mu\phi m d M$, qu'elle traverse de M en m : la branche $ANnXV$, qui s'étend à l'infini du côté des x négatifs, forme deux *sinuosités* KNn , NnX , dont les sommets N & n ont des tangentes NB , nb , parallèles à l'ordonnée principale GL .

Après avoir pris du côté où les x sont positifs $GQ = a$ $G2Q = a + b$, $Gq = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$
 $-\frac{1}{2}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $G2q = \frac{1}{2}a$
 $-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, & du côté où les x sont négatifs, $GB = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{4aa + 10ba + 4bb}$, & $Gb = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{4aa - 2ab - 2bb}$, on élèvera des points Q , $2Q$, q , $2q$, les quatre droites Qd , $2Qm$, $q\pi$ & $2q\pi$ parallèles à l'ordonnée principale GL , & ensuite des points B & b les droites BX ,

BX , bn , paralleles aux premieres; cela fait, si l'on prend sur la droite Qd la partie $QM=c$, le point M sera un de ceux où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\epsilon M$: si l'on prend $M\delta$ (de l'autre côté du point M par rapport au point Q) tel que $M\delta$, soit $=c=$

$$\frac{b\sqrt{9b+18a}}{2\sqrt{2a}}, \text{ le point } \delta \text{ sera un des points}$$

de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe: si l'on prend, sur la droite $2Qm$ le point m , tel que $2Qm = +\frac{2}{3}c$, ce point m sera le 2^d point où la branche $AMmZ$ coupe l'ovale $M\mu\phi m\delta\epsilon M$: & si, sur cette même droite $2QM$, on prend $2Q\mu = c - \frac{1}{3}c$, le point μ sera l'autre point de l'ovale où la tangente est parallele à l'axe; enfin, si par les points M & m , on tire les droites $M\phi$, $m\epsilon$, paralleles à l'axe GQ , le point ϕ où la premiere droite $M\phi$ coupera la droite $q\pi$, sera un des points de l'ovale où la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL , & le point ϵ où la seconde droite $m\epsilon$ coupe la droite $2q\epsilon$, sera le second point de l'ovale où la tangente est parallele à la même ordonnée principale GL , c'est-à-dire, que $q\phi$ & $2q\epsilon$ seront tangentes de l'ovale, l'une au point ϕ , l'autre au point ϵ , enforte que si l'on prolonge les tangentes de l'ovale aux points δ & μ jusqu'à ce qu'elles rencontrent la droite $q\pi$, l'une au point π , l'autre au point ξ , l'ovale se trouvera renfermée d'un côté entre les droites $2q\epsilon$, $q\pi$, & de l'autre entre les droites $\delta\pi$, $\mu\xi$.

Si l'on prend sur la droite BX la partie
 $B N$

$BN = c$ & la partie $BX = c + \frac{1}{2}c$, le point N fera le sommet de la premiere sinuosité KNn de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL , & le point X fera l'extrémité de la seconde sinuosité NnX de la même branche $ANnXV$: de même si l'on prend sur la droite bn la partie $bn = c + \frac{1}{2}c$, & la partie $bK = c - \frac{1}{2}c$, le point n fera le sommet de la seconde sinuosité NnX de la branche $ANnXV$, auquel la tangente est parallele à l'ordonnée principale GL , & le point K fera l'extrémité de la premiere sinuosité KNn de la même branche $ANnXV$. Enfin si du point E , où la droite MN , parallele à l'axe, coupe l'ordonnée principale GL , on prend, sur cette même droite GL , la partie EA égale à la racine réelle de cette égalité $W^3 - cW^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}aab = 0$, en allant de E vers G , parce que cette racine est négative, on aura le point A , où les deux branches $ZmMA$, $VXnNA$, s'unissent, en coupant l'ordonnée principale GL parallèlement à l'axe GQ .

Tout cela n'est qu'une suite des principes qu'on a démontrés jusqu'ici, le calcul même n'en est pas fort difficile, je l'ometts ici (parce qu'il ne serviroit qu'à allonger) pour en venir à la formation des *points triples invisibles*.

Tout ce qu'on vient de dire étant donc supposé, il est visible que la grandeur de l'ovale $M\phi m\delta : Mc$ dépend des grandeurs de la

$$\text{droite } M\phi\left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{4a^2 - 10ba + 4bb}\right)$$

$Mm. 1730.$ 0 $\&$

& de la droite $M\delta$ ($c = \frac{b\sqrt{9b+12a}}{12\sqrt{2a}}$). Ces

droites étant donc, pour ainsi dire, les paramètres de cette ovale, si la droite $Q_2 Q(b)$ est supposée infiniment petite, $M\phi$ devient en même tems infiniment petite: car $Q_2 Q(b)$ étant alors $= 0$ par rapport à $GQ(a)$, on a $M\phi = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = 0$, la droite $M\delta$

($c = \frac{b\sqrt{9b+12a}}{12\sqrt{2a}}$) devient aussi infiniment

petite ou égale à zero par rapport à $GQ(a)$: ainsi l'ovale $M\mu\phi m\delta$ M devient une ovale infiniment petite, mais elle demeure toujours adhérente à la branche $AMmZ^*$.

A l'égard de ce qui arrive à la branche $ANnXV$, quoique cela ne soit pas du sujet dont nous traitons dans cet Article, il n'est pas hors de propos de faire remarquer, en passant, que les deux sinuosités KNn , NnX , deviennent infiniment petites, & se changent en une inflexion parallèle à l'ordonnée principale: mais je m'attache uniquement ici à la branche $ZmMA$, sur laquelle l'ovale (comme on a déjà dit) devient infiniment petite, & par conséquent invisible sur le plan.

Quoique cette ovale soit invisible, il en reste des marques dans l'équation: en effet lorsque $Q_2 Q(b)$ devient $= 0$, par rapport à $GQ(a)$, l'équation de la courbe $ZmMANnXV$ se change en celle qu'on voit ici marquée par

$$(2) \dots xy^3 - 3acxy^2 + 3acey - ac^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}1axx - \frac{1}{12}a^2,$$

tous les termes, où les coefficients b

&

& e se rencontrent, devenant infiniment petits & par conséquent égaux à zero par rapport aux autres.

Maintenant si on cherche quelle doit être la valeur de GE ou $QM(y)$ au point Q auquel $x=a$, on trouve ^a l'égalité (L) qui est du troisième degré, & qui a par conséquent trois racines;

$$(L) \dots y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$$

Ces trois racines sont réelles & égales entre elles, étant $y=e$, $y=e$, $y=e$; d'où il suit que $GE(g) = e$ est une racine triple de l'égalité (L) , ce qui dénote en M^b , ou un point d'inflexion parallèle à l'ordonnée principale, auquel QM seroit tangente, ou un point double ^c auquel QM est tangente, ou bien un point triple ^d auquel QM est sécante. Mais si l'on substitue dans l'équation (2) , au lieu de l'indéterminée (y) la valeur e , pour connoître ^e la nature du point M , on trouve l'égalité (A) , qui étant du quatrième degré, doit avoir quatre racines réelles ou imaginaires.

$$(A) \dots \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}aaxx - \frac{1}{4}a^4 = 0.$$

Ces quatre racines sont réelles, & il y en a trois égales entre elles, & une quatrième qui est inégale, car cette égalité donne $x=a$, $x=a$, $x=a$, & $x=-\frac{1}{2}a$, d'où il suit que $GQ(R) = a$ est une racine triple de l'égalité (A) , & qu'il y a de l'autre côté de G une valeur de (x) qui est égale à $\frac{1}{2}GQ$, laquelle correspond à une racine triple de l'égalité (L) ,

^a Art. 49. V. la Table. ^b Art. 2. n. 2.

^c Art. 19. n. 1. ^d Art. 18. n. 2. ^e Art. 49. V. la Table.

(L), & par conséquent qu'il y a en N une inflexion parallèle à l'ordonnée principale. *Ce que je remarque seulement en passant, pour faire voir l'usage des règles qu'on a données ci-devant.* Revenons au point M dont il faut faire connoître la nature.

On a trouvé que $GE(g) = e$ est une racine triple de l'égalité (L); d'où l'on a conclu que le point M pourroit être, ou un point dont l'inflexion seroit parallèle à l'axe, ou un point double auquel QM seroit tangente, ou un point triple auquel QM seroit sécante. Mais $GQ(K) = a$ est aussi une racine triple de l'égalité (A), donc, 1°. le point M ne sauroit être un simple point d'inflexion, (car il faudroit pour cela que $GQ(a)$ ne fût qu'une racine simple de l'égalité marquée par (A))^b; 2°. ce même point M ne sauroit être un point double avec rebroussement, (car $GQ(a)$ ne seroit alors qu'une racine double^c de l'égalité (A)). Donc il ne peut être qu'un point double sans rebroussement, auquel QM & EM seroient tangentes^d, ou bien un point triple auquel QM & EM seront sécantes.

Pour connoître maintenant si ce point M est un point double, ou un point triple, on transportera l'origine des indéterminées de G en M , en prenant $x = y - e$, & $z = x - e$, ce qui transformera l'équation (2) en celle que l'on voit ici marquée par (Δ)^e.

$$(\Delta) \dots 4ax^3 = z^4 + \frac{1}{4}az^2.$$

Cela

^a Art. 50.

^b Art. 50. n. 3.

^c Art. 51.

^d Art. 53.

^e Art. 49. *V. la Table.*

Cela fait, par les points G & M , on tirera la droite GM , qui coupera la courbe en autant de points ^a qu'il y a de racines réelles dans l'égalité $(2K)$ en y comprenant les points

$$(2K) \dots z^4 + \frac{4}{3}az^3 - 4ab^2z^2 \} = 0$$

doubles pour deux points, & les points triples pour trois.

Dans cette égalité (qui est donnée par la comparaison des triangles semblables G/K ,

MP/M , & dans laquelle $IK(b) = \frac{e}{a}$ ^b les

quatre racines sont $z=0$, $z=0$, $z=0$, &

$z = -\frac{4}{3}a + \frac{4e^2}{aa}$, en sorte qu'elle a trois de

cés racines qui sont égales à zero; d'où il suit que la droite GM sécante en M ne faudroit y être sécante en un point double, (car il faudroit pour cela ^c qu'il n'y eût dans l'égalité $(2K)$ que deux racines égales à zero): donc le point M est un point triple, auquel QM , EM , & GM sont sécantes ^d.

Mais on a vu ci-devant qu'en ce point M , il y a une ovale infiniment petite adhérente à la courbe, qui est invisible sur le plan: donc l'ovale infiniment petite, adhérente à une des branches de la courbe, est désignée dans l'équation, qui exprime la nature de la courbe, par les mêmes symptômes que le point triple. Donc ces ovales infiniment petites adhérentes sont des especes de points triples in-

^a Art. 33. & 49.

^c Art. 53. n. 1.

^b Art. 49. V. la Table.

^d Art. id.

invisibles. *Ce qu'il falloit faire connoître par cet exemple.*

Les points triples invisibles ou ovales infiniment petites adhérentes à une des branches de la courbe, ont tant de rapport avec les points triples visibles, formés par l'interfection de trois branches finies ou infinies de la même courbe; que si l'on cherche la tangente de la courbe au point où la triplicité est invisible, il faudra différentier trois fois, conformément à l'Article 46, pour avoir le rapport du dx au dy . Il s'agit donc de vérifier cette proposition par ce même exemple.

Soit donc toujours la courbe $ZMA NV^*$, dont la nature est exprimée par l'équation marquée par (2)

(2)... $ay^3 - 3axy^2 + 3acxy - ae^3 = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}ax^3 + \frac{1}{2}a^2xx - \frac{1}{2}a^4$. En différentiant cette équation, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2axx + aax}{3a \times yy - 2ey + ee} : \text{ si on demande le rap-}$$

port de dx à dy au point M , où l'on a trouvé $x=a$, & $y=e$, il est visible que la substitution de x & de y dans la différentielle pré-

cédente donne $\frac{dy}{dx} = 0$, d'où il suit (par

l'Art. 163 de l'Analyse des Infinim. petits) qu'il faut différentier séparément le numérateur & le dénominateur de cette fraction, cette seconde différentiation donne

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3xx - 4ax + aa}{6a \times y - e} : \text{ si on substitue}$$

dans cette seconde différentielle, au-lieu de x &

* Fig. 40.

x & de y , leurs valeurs au point M on aura

encore $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2}{3}$, d'où il suit qu'il faut diffé-

rentier une troisieme fois, suivant les méthodes de M^{rs}. Bernoulli & Saurin, cette troi-

sieme differentiation donne $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6x-4a}{6a}$.

Si on substitue dans cette troisieme différentielle, la valeur de x au point M , c'est-à-di-

re, a au-lieu de x , ou aura $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{6a-4a}{6a} = \frac{2}{3}$,

d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$, qui fait connoi-

tre enfin que l'ordonnée QM au point M est à la soutangente QT en ce même point M ,

comme 1 est à $\sqrt[3]{3}$, c'est-à-dire, que QT

$= e \sqrt[3]{3}$. Mais pour trouver cette valeur de

la soutangente QT , il a fallu différentier trois

fois, comme s'il y eût eu trois branches qui

se fussent rencontrées en M . Donc pour trou-

ver la valeur de la soutangente au point triple

invisible M , il faut faire les mêmes opérations

que pour le point triple visible. *Ce que je m'étois*

proposé de faire connoître en second lieu par cet exemple

Avant de finir cet Article, il ne faut pas

oublier de remarquer que la troisieme diffé-

rentiation n'ayant fourni ici, au point M ,

que l'égalité $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{2}{3}$, qui ne sauroit avoir

qu'une seule racine réelle, il s'ensuit qu'il n'y a

au point M , qu'une seule tangente, ce qui

est encore une nouvelle preuve qu'il n'y passe qu'une seule branche de la courbe *ZMANV*. D'où l'on voit la différence qu'il y a entre un point triple invisible, & un point triple visible. Car si ce point triple *M* eût été formé par la rencontre de trois branches finies ou infinies de la courbe, la troisième différentiation auroit fourni une égalité du troisième degré qui auroit eu trois racines réelles, à cause des trois tangentes qui se seroient rencontrées au point *M*. *Difference que je m'étois proposé de faire remarquer en dernier lieu par cet exemple.*



EXAMEN CHYMIQUE

DES VIANDES

Qu'on employe ordinairement dans les Bouillons :

Par lequel on peut connoître la quantité d'Extrait qu'elles fournissent, & déterminer ce que chaque Bouillon doit contenir de suc nourissant.

Par M. GEOFFROY le Cadet

DE tous les Alimens, ceux qu'on tire des Végétaux devroient être les plus convenables aux malades, parce qu'ayant des principes moins développés, ils semblent être les plus analogues à la Nature, comme M. Lémery l'a prouvé dans un de ses Mémoires: ce-

Fig. 3.

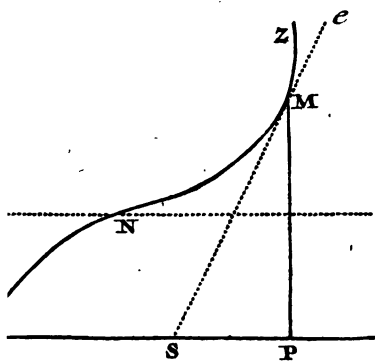


Fig. 7.

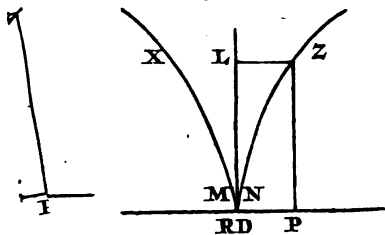




Fig. 9.

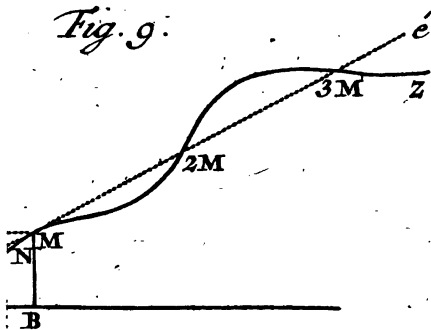
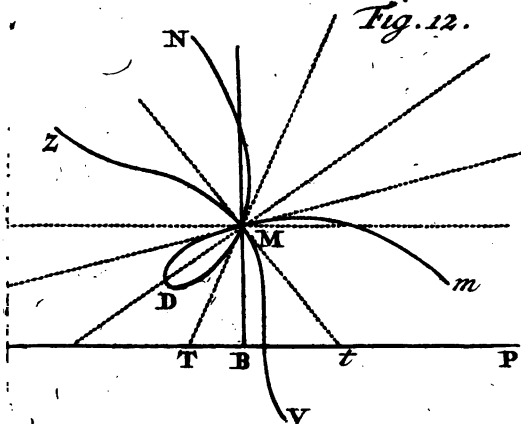


Fig. 12.



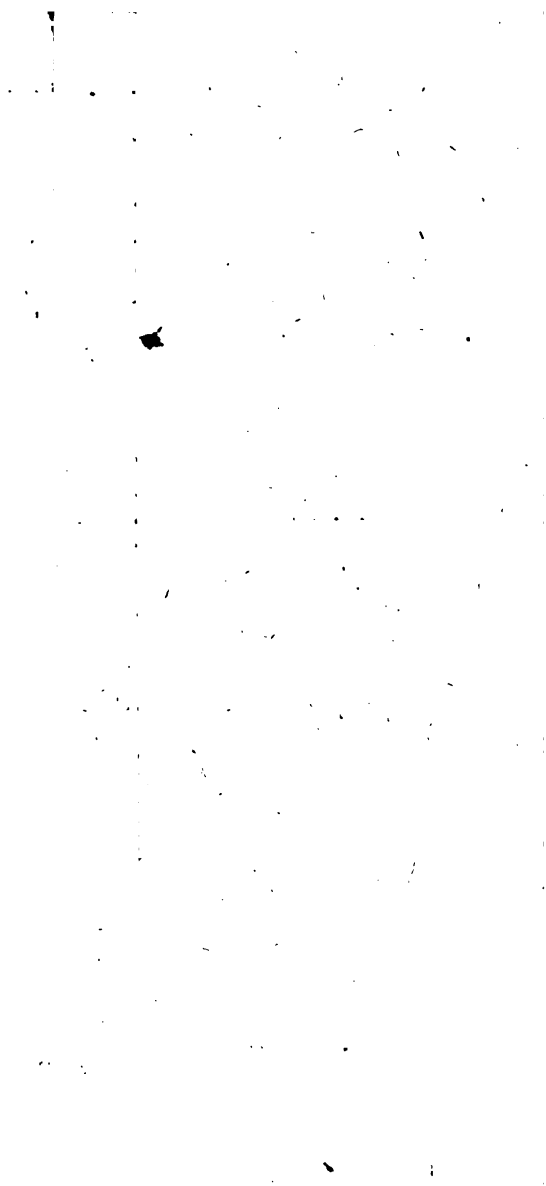


Fig. 14.

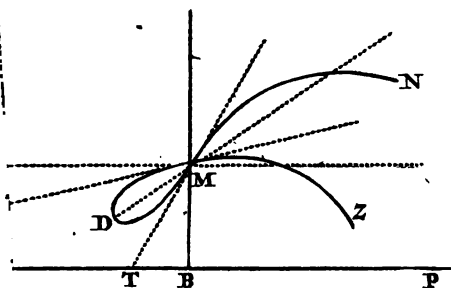
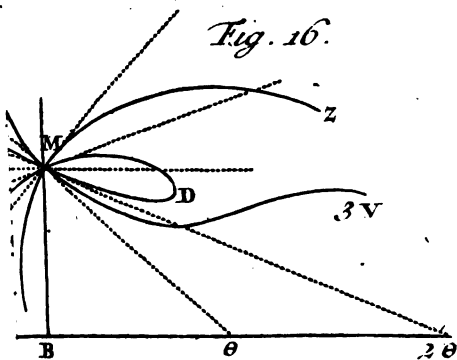


Fig. 16.



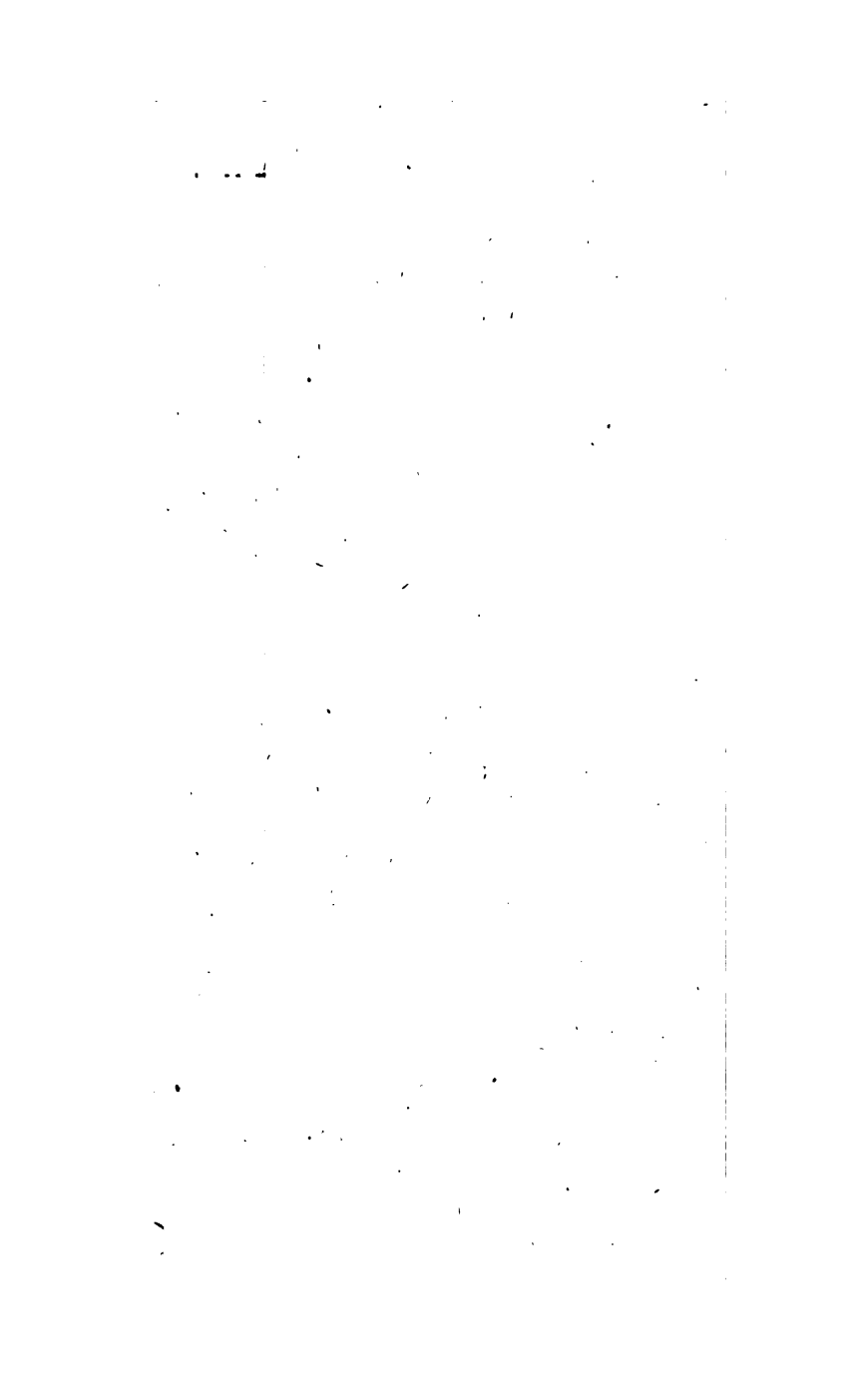


Fig. 18.

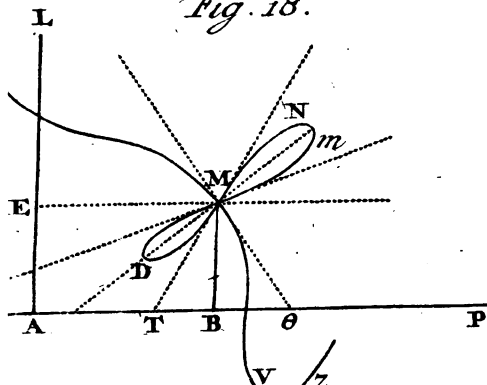
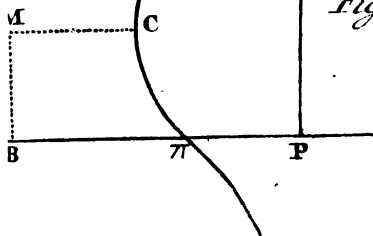


Fig. 20.



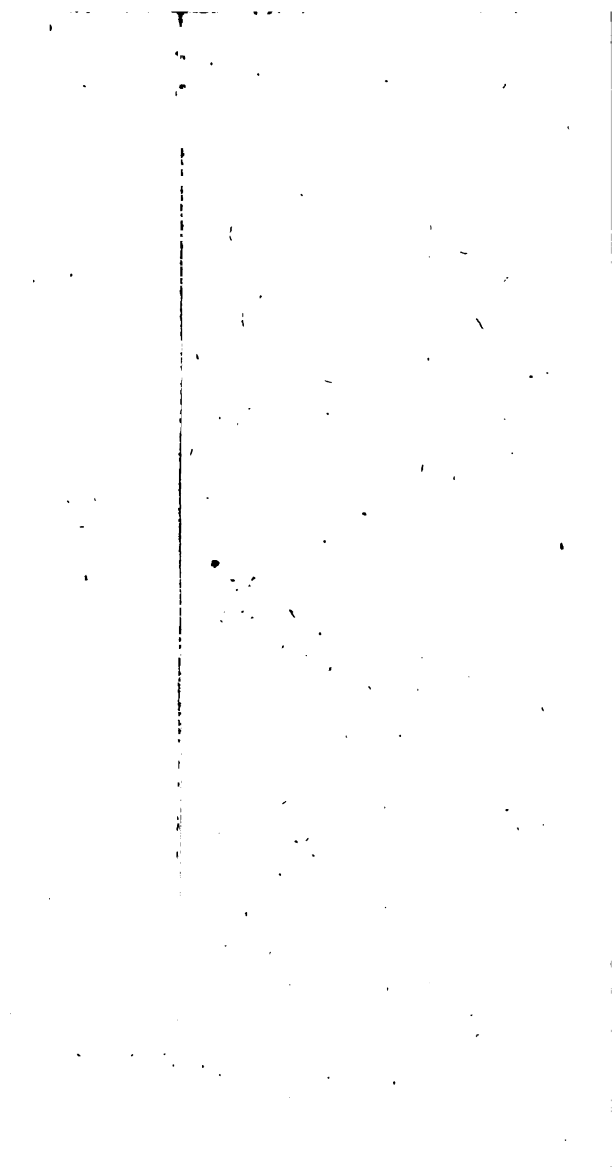
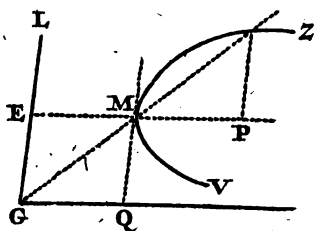
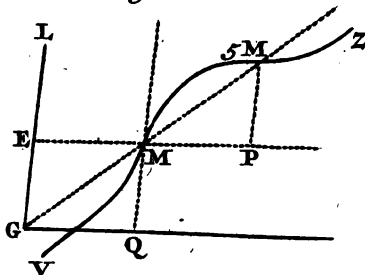


Fig. 21. bis.



5m
X
59

Fig. 22. bis.



X

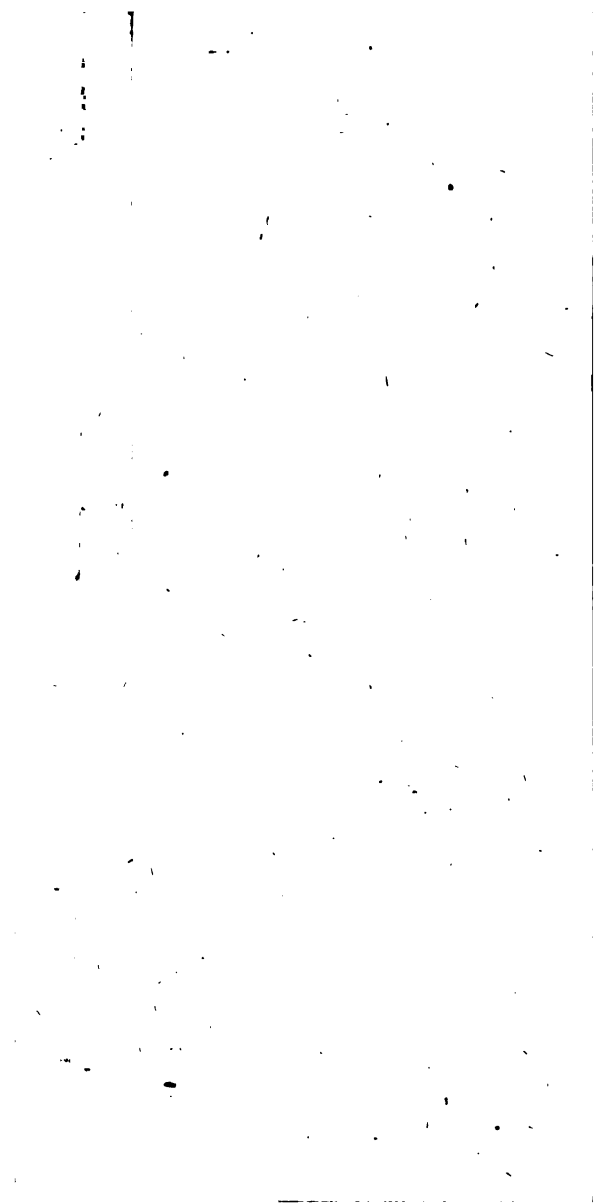


Fig. 27.

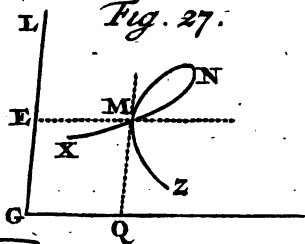


Fig. 28.

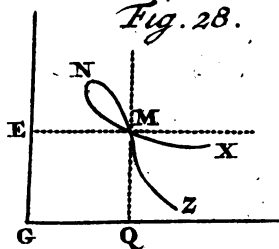
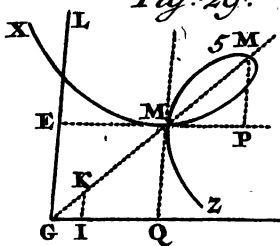
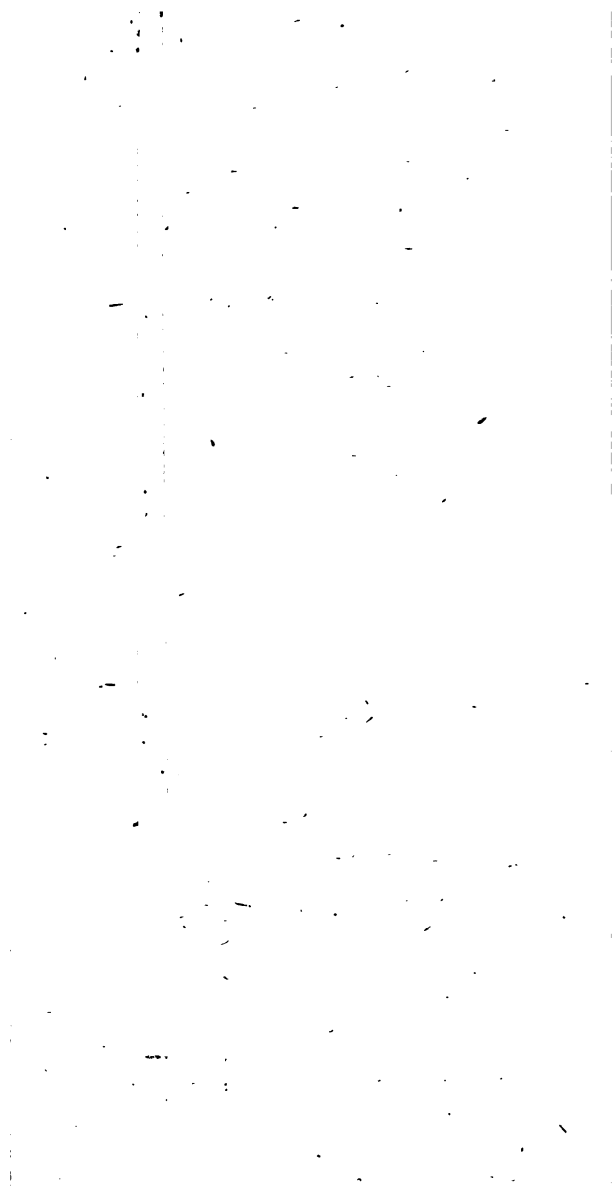


Fig. 29.





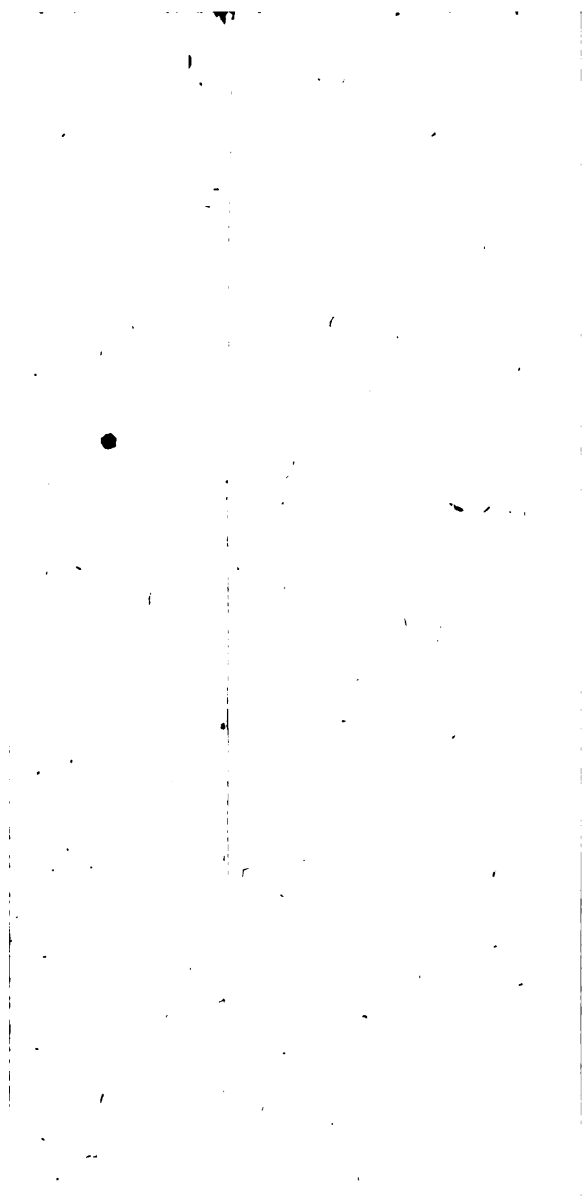


Fig. 37.

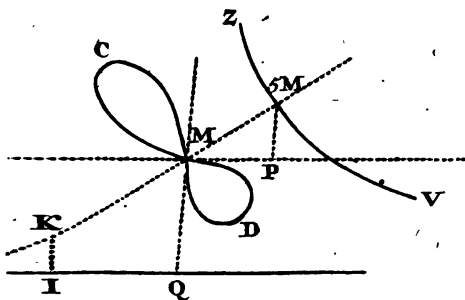
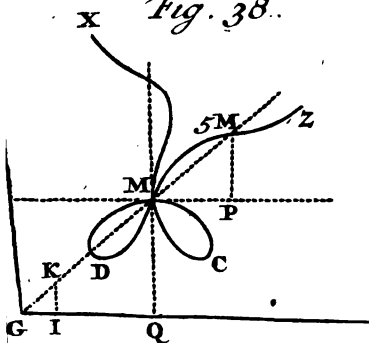
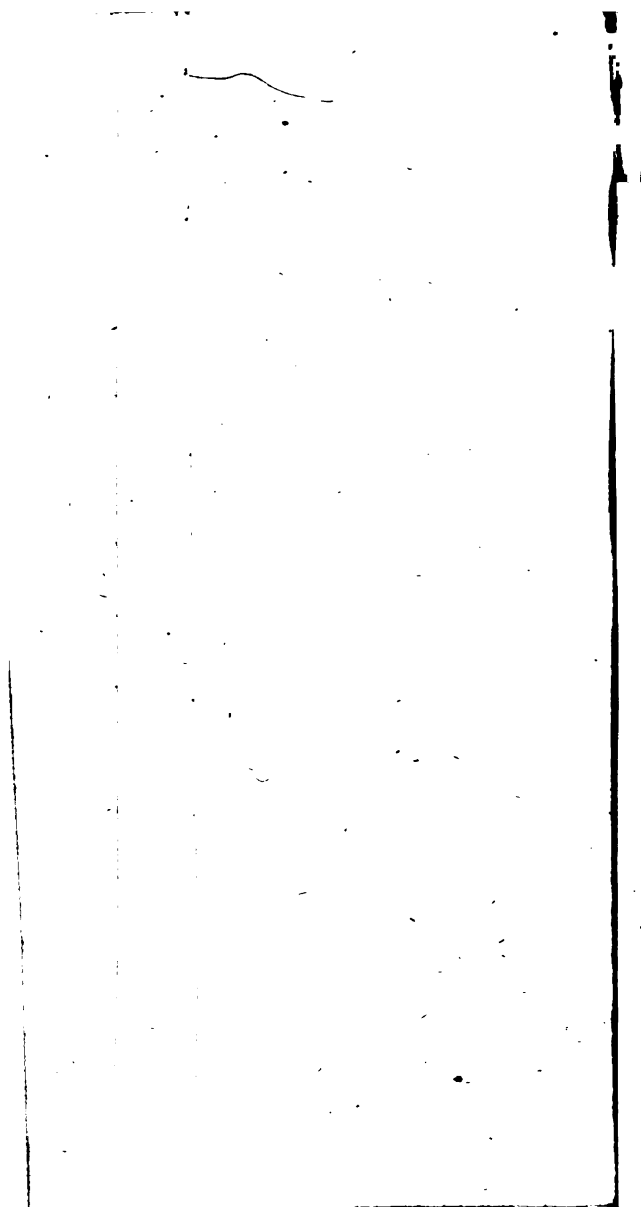


Fig. 38.





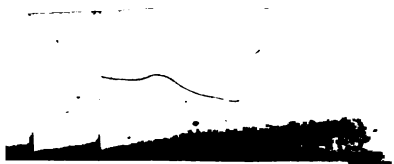
pendant le bouillon fait avec les Viandes,
 la nourriture que l'usage a établi, & qui
 se généralement pour la plus saine & la

(2K)...

(3K)...

ce
el
p
p
el

q
e
a
t
e
f
l
a
c
n
l
c
v
n
c



pendant le bouillon fait avec les Viandes, la nourriture que l'usage a établi, & qui s'est généralement pour la plus saine & la nécessaire dans les cas de maladie, où est presque toujours la seule employée.

Je n'est que par l'examen des principes de cette nourriture contient, qu'on peut se en état de la donner avec discernement, on ne ne pas courir le risque de la prescrire trop forte dans les circonstances où la diete exacte est quelquefois le seul remede; ni trop foible, lorsque le malade exténué par une longue maladie, a besoin d'une nourriture augmentée par degrés, pour réparer ses forces. C'est pour parvenir à des éclaircissements utiles sur cette proportion, que j'ai fait l'analyse des Viandes qui sont le plus d'usage, ou qui contiennent un suc nourrissant regardé comme salutaire; telles que le Bœuf, le Veau, le Poulet, &c. Je n'ai entrepris cette recherche, que parce que l'analyse des Viandes n'a pas été portée aussi loin que celle des Plantes.

Feu M. Dodart, dont la mémoire est si respectable à l'Académie, & dont l'extrême exactitude est si connue, s'est contenté de dire en 1702*, qu'il tenoit de feu M. Bourdelin, que les chairs des Animaux bouillies en consommé, & ensuite mises à la distillation, ne rendoient pas moins de Sel volatil que si elles avoient été distillées crues. Comme il paroît qu'on a négligé de déterminer la quantité d'extrait que ces consommés laissoient

* *Hist. de l'Acad. des Sc. année 1702. p. 56.*

soient après l'évaporation, & ce que les Vian-
des pourroient avoir communiqué de leurs
principes à l'eau, dans laquelle on les avoit
fait bouillir; j'ai repris ce travail, afin d'ajou-
ter aux analyses déjà connues, cette partie
négligée, qui est l'objet de ce Mémoire. Je
me suis proposé d'y faire connoître la quan-
tité & la qualité des principes des chairs
crues mises en distillation; ce qu'elles four-
nissent de principes aux extraits solides qu'on
en tire par l'ébullition & l'évaporation; la
différence essentielle des Sels volatils qu'on
en tire; ce que les chairs dépouillées de leurs
sucs & sechées contiennent encore de prin-
cipes: enfin je déterminerai dans un autre
Mémoire, ce que les os & les matieres os-
seuses peuvent fournir, dans la cuisson, d'ex-
trait nourrissant.

CHAIR DE BŒUF.

Je commencerai par la chair de Bœuf: j'en
ai pris une grosse piece de tranche, dont j'ai
fait ôter la graisse, les os, les cartilages &
les membranes; de cette piece de Bœuf j'ai
fait couper plusieurs morceaux d'un poids é-
gal de 4 onces. L'un de ces morceaux a été
mis en distillation au Bain-Marie sans aucune
addition. Il a fourni 2 onces 6 gros 36 grains
de flegme ou d'humidité qui a passé dans le
Récipient. La chair restée sèche dans la cor-
nue, s'est trouvée réduite au poids d'une
once 1 gros 36 grains. Le flegme avoit l'odeur
de bouillon; il a donné des marques de Sel
volatil, puisqu'il a précipité en blanc la dis-
solu-

folution du Mercure sublimé corrosif, comme les purs Sels volatils ont coutume de le faire; & le dernier flegme de la distillation en a donné des marques encore plus sensibles, en précipitant une plus grande quantité de la même dissolution.

Cette chair desséchée, qui pesoit 1 once 1 gros 36 grains, ayant été mise dans une cornue au fourneau de reverbere pour l'analyser, m'a donné d'abord un peu de flegme chargé d'Esprit volatil, qui pesoit 1 gros 4 grains: ensuite 3 gros 46 grains de Sel volatil & d'Huile fétide épaisse qui n'a pu s'en séparer.

La Tête-morte ou la matiere restée dans la cornue, pesoit 3 gros 30 grains: c'étoit un charbon noir, luisant & léger, qu'on a calciné dans un creuset à feu très violent; la calcination l'a réduit en cendres, qui pesoient 40 grains. Ces cendres exposées à l'air se sont humectées, & ont augmenté de poids. Elles ont été lessivées, & l'eau de leur lessive éclaircie, n'a point donné de marques de Sel alkali, mais de Sel marin, puisqu'elle a précipité en blanc la dissolution du Mercure dans l'Esprit de Nitre. Elle n'a causé aucun changement à la dissolution du sublimé corrosif, si ce n'est qu'après quelque tems de repos, il s'est formé au bas du vaisseau une espèce de nuage, en forme de Coagulum léger: et nous ne connoissons jusqu'à présent que les Sels qui sont de la nature du Sel ammoniac ou le Sel marin, qui précipitent en blanc la dissolution de Mercure par l'Esprit de Nitre, & seulement les terres absorbantes

animales que j'ai observé précipiter légèrement la dissolution du sublimé corrosif.

Sur 4 onces de chair de Bœuf sechée au Bain-Marie, j'ai versé autant d'Esprit de Vin bien rectifié; le tout est demeuré en digestion pendant un très long tems; l'Esprit a tiré de cette Viande une foible teinture, il en a détaché quelques gouttes d'huile, la couleur qu'il a prise étoit roussie avec une odeur fade: l'Huile de Tartre mêlée avec cet Esprit en a développé une odeur urineuse, son mélange avec la dissolution de Mercure par l'Esprit de Nitre à blanchi, il s'y est fait un précipité blanc-jaunâtre; puis cette liqueur est devenue ardoisée, à cause du Sel ammoniacal urineux, dont l'Esprit de Vin s'étoit imbu. L'essai de cet Esprit de Vin, mélangé avec la dissolution du sublimé corrosif, a produit un précipité blanc, qui est devenu un peu jaune; cette précipitation ne s'est faite dans ce dernier cas, que par le développement d'une portion du Sel volatil urineux, qui a passé dans l'Esprit de Vin avec le Sel ammoniacal.

Quatre onces de pareille chair de Bœuf ayant été cuites dans un vaisseau bien fermé, avec trois chopines d'eau, & la cuisson ayant été répétée six fois avec pareille quantité de nouvelle eau, pour tirer autant qu'il étoit possible tout le suc de cette Viande; j'ai rassemblé tous ces bouillons, dont les derniers n'avoient plus qu'une odeur d'eau de Veau très legere. Je les ai fait évaporer à feu lent, je les ai filtrés vers la fin de l'évaporation, pour en séparer une portion terreuse, & il est

est resté dans le vaisseau un extrait médiocrement solide, qui s'humeçtoit à l'air très facilement, & qui s'est trouvé peser 1 gros 56 grains. Ainsi il résulte de cette expérience, que puisque 4 onces de Bœuf bouilli donnent 1 gros 56 grains d'extrait, une livre de semblable chair de Bœuf bouillie doit fournir 7 gros 8 grains de pareil extrait, plus 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, & 3 onces 2 gros de fibres dépouillées de tout leur suc. Ce produit peut varier, selon que l'animal aura été bien ou mal nourri dans de bons ou de mauvais herbages. Il peut varier aussi, si la chair que l'on choisit pour l'expérience est plus ou moins fraîche. Il faut remarquer que le bouillon fait d'une bonne chair de Bœuf, ne se met presque jamais en gelée, si l'on ôte de la chair, les membranes, les tendons & les cartilages. Or j'entends par gelée, non l'extrait ci-dessus, mais le bouillon qui se met de lui-même en une masse claire & tremblante lorsqu'il est froid.

L'extrait de cette chair de Bœuf, qui pesoit 1 gros 56 grains, a fourni dans son analyse 1 gros 2 grains de Sel volatil, attaché aux parois du Récipient, non pas en ramifications, comme le sont ordinairement les Sels volatils, mais en cristaux plats, formés la plupart en parallépipèdes; l'Esprit & l'Huile qui sont venus ensemble après le Sel volatil pesoient 38 grains. Le Sel fixe de Tartre, mêlé avec ce Sel volatil, a paru augmenter sa force, ce qui pourroit faire soupçonner ce dernier d'être un Sel ammoniacal urineux; & ce soupçon est d'autant mieux fon-

fondé, que les cryſtaux de ce Sel volatil ſe forment à peu près comme ceux du Sel volatil de l'Urine, qu'on fait être differens des autres Sels volatils tirés des chairs des animaux.

La Tête-morte ou le charbon reſté dans la cornue étoit très raréfié & très leger, il ne peſoit plus que 6 grains. Sa leſſive a précipité en blanc la diſſolution du Mercure, comme a fait la leſſive de la cendre de chair de Bœuf crue, dont j'ai parlé ci-deſſus.

Les 6 gros 36 grains de la maſſe des fibres de Bœuf deſſéchées, analyſées de la même façon, ont rendu 2 gros d'un Sel volatil de la forme des Sels volatils ordinaires, & qui s'eſt attaché aux parois du Récipient en ramifications, & mêlé d'un peu d'Huile fétide aſſez épaiſſe, mais moins brune que celle de l'extrait qui a été tirée du bouillon. L'Eſprit qui étoit de couleur citrine, ſéparé de ſon huile, a peſé 36 grains. La Tête-morte peſoit 1 gros 60 grains.

La leſſive qu'on a faite après la calcination n'a pu alterer la diſſolution du Mercure par l'Eſprit de Nitre, parce que lorsqu'on a analyſé ces fibres de Bœuf deſſéchées, elles étoient déjà dénuées, non-ſeulement de tout leur Sel eſſentiel ammoniacal, mais encore de leur Sel fixe qui eſt de nature de Sel marin; puisqu'elles ont paſſé pour la plus grande partie avec les Huiles dans l'eau pendant la longue ébullition de cette chair. Cette leſſive a ſeulement teint légèrement de couleur d'Opale, la diſſolution du ſublîmé corroſif, preuve qu'il y reſtoit encore une portion

tion huileuse: on fait que les matiers sulphureuses précipitent cette dissolution en noir, ou plutôt en violet foncé, dont la couleur d'Opale est un commencement.

On connoit donc par l'analyse de l'extrait des bouillons, que je viens de rapporter, qu'il passe dans l'eau pendant l'ébullition de la chair de Bœuf un Sel ammoniacal qu'on peut regarder comme le Sel essentiel de cette Viande, & qui paroît dans la distillation de l'extrait sous une forme différente de celui qu'on retire de la chair, lorsqu'on la distille crue, comme on a fait dans les analyses anciennes; & il y a apparence que c'est ce même Sel qui se sépare du Sang par les Urines après la nutrition, puisque le Sel volatil que j'ai retiré de cet extrait a beaucoup de rapport, comme je l'ai fait voir, avec celui qu'on retire de l'Urine par son analyse. Le Sel que l'on tire de l'extrait fera donc le produit de ce Sel ammoniacal naturel dans les Viandes, qui est plus facile à sublimer avec celui qui se tire ensuite des fibres: & l'on peut dire, après cette operation, que les Sels volatils sont presque toujours un produit du feu, puisque des principes si peu sensibles ne peuvent se développer qu'autant que la matiere se brule & se calcine par la violence du feu pour former le Sel volatil.

J'ai détaillé mes operations sur la chair de Bœuf, pour rendre un compte exact de mon travail, qui a été le même sur toutes les autres Viandes que j'ai examinées. Je ne repeterai point ces procedés dans la suite de ce Mémoire, de crainte d'être trop long.

CHAIR

CHAIR DE VEAU.

Quatre onces de chair, prise dans une Rouelle de Veau, distillée crue au Bain-Marie, comme la chair de Bœuf, a donné 2 onces 6 gros 54 grains d'humidité; la chair desséchée pesoit 1 once 1 gros 18 grains, après avoir fourni ses principes par l'analyse. Le *Caput-mortuum* pesoit 2 gros 51 grains, la lessive a donné des marques de Sel marin, comme l'a fait celle du Bœuf.

Quatre onces de pareille chair bouillie, ont fourni un bouillon un peu gélatineux: ce bouillon réduit en extrait en a laissé 2 gros 30 grains assez solide, quoique difficile à dessécher: la masse des fibres desséchées s'est trouvée réduite au poids de 5 gros 62 grains. Ainsi une livre de Rouelle de Veau contient 11 onces 6 gros 64 grains de flegme, une once un gros 48 grains d'extrait, & 2 onces 7 gros 32 grains de fibres desséchées ou entièrement dépouillées de leur suc.

En comparant les produits de ces premières opérations faites sur la chair de Bœuf & sur celle de Veau, je trouve que le Veau a, par poids de 4 onces, 18 grains de flegme plus que le Bœuf; qu'il fournit 46 grains d'extrait de plus, & que ses fibres desséchées pesent 46 grains de moins. Ainsi puisque ses fibres desséchées pesent moins que celles de Bœuf, puisqu'on en tire plus de flegme & plus de parties gommeuses, ne peut-on pas présumer que les liqueurs qui circulent dans le corps du Veau, où elles sont destinées non-seulement

ment à la nutrition, mais aussi à l'accroissement de l'Animal qui n'est pas encore parfait, doivent contenir des particules plus disposées à une prochaine solidité, que les liqueurs circulantes dans le corps du Bœuf où elles n'ont d'autre destination que celle de la nutrition. C'est aussi par cette raison que l'extrait qu'on tire de la chair de Veau devient plus ferme que celui de la chair de Bœuf, parce qu'il contient plus de ces particules gommeuses destinées à devenir solides pour prolonger les os, les cartilages, les tendons, &c. Et il est impossible de donner la même fermeté à l'extrait de la chair de Bœuf, si l'on n'y joint pas dans la cuisson ses os, ses cartilages & ses membranes, qui ne sont, pour ainsi dire, qu'un composé de ces particules gommeuses.

Les 2 gros 30 grains d'extrait de chair de Veau m'ont donné par l'analyse un gros 12 grains tant en Esprit qu'en Huile & en Sel volatil, qui avoit le caractère urineux comme celui du Bœuf; la Tête-morte restée dans la cornue n'a pesé qu'un gros.

Les 5 gros 62 grains de la masse de fibres desséchées qui ont fourni l'extrait, étant mis de même au feu de réverbère, ont fourni un gros 66 grains de Sel volatil, qui portoit le caractère des Sels volatils ordinaires, c'est-à-dire, qu'il étoit en ramifications, & un gros 37 grains d'Huile & d'Esprit volatil; la Tête-morte restée dans la Cornue pesoit 2 gros 18 grains.

Je reprends ici les poids de ces Têtes-mortes ou charbons qui ne peuvent être sujets à
erreur,

322. MÉMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

erreur, sur-tout par rapport à leur pesanteur. Celui de l'extrait de Bœuf ne pesoit que 6 grains, celui de l'extrait de Veau en pesoit 72, ainsi 66 grains de difference de poids entre ces deux charbons d'extraits.

Le charbon de fibres desséchées de Bœuf ne pesoit qu'un gros 60 grains, & celui du Veau, 2 gros 18 grains; autre difference de 30 grains.

Ces deux poids excédens, joints ensemble, donnent un total de 96 grains de parties, regardées comme solides, qui sont de plus dans le Veau que dans le Bœuf. Ces parties solides, jointes aux particules gommeuses dont j'ai parlé ci-dessus, qui sont destinées à devenir solides pour l'accroissement de l'Animal, étant numériquement beaucoup plus considérables dans le Veau que dans le Bœuf, ne pourroit-on pas conjecturer que si ces particules conservoient dans nos corps, lorsque nous les prenons pour nous nourrir, la même destination qu'elles semblent avoir dans le corps de l'Animal dont elles sont tirées, la chair de Veau seroit convenable aux enfans, parce qu'ils croissent, & aux malades qui ont souffert une déperdition ou un amaigrissement considérable; & que la chair de Bœuf conviendrait mieux aux adultes & aux personnes qui jouissent d'une santé parfaite. Mais je ne donne ceci que comme une conjecture.

CHAIR DE MOUTON.

Quatre onces de chair de Mouton prise
dans

dans cette partie qu'on nomme vulgairement l'*Eclanche*, mise en distillation au Bain-Marie comme le Bœuf & le Veau, ont donné 2 onces 6 gros 30 grains de flegme.

La chair dépouillée de son humidité, qui pesoit une once un gros 42 grains, distillée au feu de réverbère, après avoir fourni tous ses principes, a laissé dans la cornue un charbon qui ne pesoit que 2 gros 36 grains, & dont la lessive a donné des marques de Sel marin, c'est-à-dire, qu'elle n'a point altéré la dissolution du sublimé corrosif, & qu'elle a précipité en blanc la dissolution de Mercure.

Quatre onces de la même chair de Mouton bouillie a fourni 2 gros 58 grains d'extract : ainsi une livre de pareille chair doit donner 11 onces 5 gros 32 grains de flegme, une once 3 gros 16 grains d'extract, 2 onces 7 gros 24 grains de fibres dépouillées de leur suc.

Les 2 gros 58 grains d'extract distillé au feu de réverbère ont fourni environ autant de Sel volatil que le Bœuf, & plus que le Veau ; les cristaux en ont été mieux formés. La Tête-morte n'a plus pesé que 54 grains ; sa lessive a donné des marques d'un Sel marin plus abondant que dans les autres Viandes.

Les fibres de ce Mouton étant séchées, après avoir fourni leur extract, n'ont plus pesé que 5 gros 60 grains ; ce qui prouve évidemment que le Mouton contient plus de parties nourrissantes & de principes volatils que le Bœuf & le Veau, puisqu'il laisse dans son analyse moins de matières fixes. L'analyse de ces fibres a donné assez de Sel volatil

l'ail ramifié, tel qu'il se trouve toujours dans l'analyse des fibres desséchées des Viandes: la Tête-morte a pesé 2 gros; sa lessive n'a que très peu donné de preuves de Sel marin avec les dissolutions mercurielles, parce que la plus grande partie des Sels se sont volatilisés, ou ont passé en ammoniaque dans l'extrait.

P O U L E T.

Le Poulet étant une des Viandes qu'on emploie, ou seule, ou avec les autres Viandes ordinaires des bouillons, j'en ai fait un semblable examen; j'en ai pris un jeune qui pesoit 9 onces 4 gros 48 grains; après l'avoir concassé, on l'a fait bouillir dans plusieurs eaux, qui en ont tiré un extrait gélatineux pesant 7 gros 36 grains: la chair & les os desséchés à l'étuve comme les autres Viandes n'ont plus pesé qu'une once 6 gros 40 grains. Ainsi ce Poulet devoit contenir 6 onces 6 gros 44 grains d'humidité: j'en ai fait distiller séparément à feu de réverbère 6 gros 18 grains de la chair sèche, & 3 gros 9 grains des os secs (qui est tout ce que j'en ai pu retirer): la chair m'a donné du Sel volatil en belles ramifications; la Tête-morte pesoit un gros 6 grains, la lessive de ce charbon n'a donné aucune marque de Sel.

Les os ont fourni, outre les autres principes, un peu de Sel volatil de la même figure que celui des extraits tirés des autres Viandes; la Tête-morte pesant 2 gros 8 grains,
n'a

n'a rien donné de remarquable dans les essais qu'on a fait de sa lessive.

L'extrait de la chair, qui pesoit 7 gros 36 grains, a fourni un Sel volatil figuré comme celui du Bœuf, mais qui n'est venu qu'en forçant le feu; la Tête-morte pesoit 2 gros 20 grains, sa lessive a donné des marques de Sel marin.

C O Q.

Un vieux Coq, qui pesoit 2 livres 2 onces 6 gros, m'a donné 4 onces 7 gros 66 grains d'extrait gommeux, transparent & très sec.

C H A P O N.

La chair d'un Chapon dégraissé, pesant une livre 7 onces 2 gros 48 grains, a fourni une once 5 gros d'extrait qui a eu peine à se fecher.

P I G E O N S.

Deux jeunes Pigeons de voliere, qui pesoient 14 onces, ont donné un extrait assez solide pour devenir sec, qui a pesé 7 gros 35 grains.

F A I S A N.

Un Faisan, qui pesoit 2 livres, m'a donné un extrait salin qui n'a pu se dessécher suffisamment pour former un extrait solide, quoique

326 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

que je l'aye laissé très longtems à l'étuve; cet extrait pesoit 2 onces 4 gros 16 grains; ainsi cette chair fournit plus d'extrait que le Bœuf.

P E R D R I X.

Deux Perdrix, pesant une livre 2 onces 5 gros, ont rendu une once six gros 30 grains d'extrait moins solide que celui du Faisan.

P O U L E T D' I N D E.

Un Poulet d'Inde, pesant 9 livres, a rendu 12 onces 43 grains d'un extrait assez solide, qui n'a pu se fecher, & qui est toujours resté huileux & comme résineux.

Il résulte de tout ce que je viens de lire, que l'extrait tiré des Viandes bouillies, doit être regardé comme la partie nourrissante que fournit la chair des animaux dans les bouillons qu'on en fait; sans que je prétende pour cela qu'elle soit employée toute entiere à la nutrition, puisqu'elle contient encore des parties grossieres que l'action de la digestion en sépare comme inutiles par les voyes ordinaires, plus ou moins abondamment, suivant l'état du malade. Cela supposé, il faut faire voir ce qu'un malade prend de nourriture dans un bouillon ordinaire de demi-septier de liqueur.

Si, suivant l'usage, ce bouillon est fait d'une livre de tranche de Bœuf, d'une livre & demie de Rouelle de Veau, & d'une moi-
tié

tié de Chapon, qui peut peser 14 onces; si toutes ces Viandes, pesant ensemble 3 livres 6 onces, sont cuites dans 3 pintes $\frac{1}{2}$ d'eau, réduites à 3 chopines pour en faire six bouillons, qui doivent se mettre en gelée, lorsque la cuisson des Viandes est suffisante, ces six bouillons contiendront 2 onces 5 gros 34 grains d'extrait au moins; car l'extrait total de toutes ces Viandes seroit plus fort de 3 gros 12 grains, si on avoit répété l'ébullition, comme je l'ai fait, lorsque j'ai voulu avoir tout le suc nourrissant; & si le malade les prend tous les six dans les 24 heures, il aura pris par conséquent environ 2 onces 5 gros 34 grains d'une nourriture, qui, comparée avec le poids entier du pain & de la Viande qu'il peut manger en santé, paroît trop forte: ainsi, c'est à tort que le Vulgaire s' imagine que les malades ne sont pas suffisamment nourris par les bouillons.

Il y a même des circonstances où ils le seroient assez par les Eaux de Veau ou de Poulet, puisque la première, qui seroit faite avec une livre de Veau sur 2 pintes d'eau, réduites à moitié, contiendrait une once un gros 48 grains d'extrait; & que l'eau d'un Poulet qui peut peser 9 onces 4 gros & quelques grains, donne 7 gros 36 grains d'extrait. Il faut aussi faire remarquer que les Sels volatils & les Huiles de ces extraits, étendus dans les bouillons, sont plus développés, & qu'ils doivent passer plus vite dans le sang, que ceux qui étant encore embarrassés dans les fibres grossières des Viandes, occupent plus longtems
l'ac-

328 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

l'action de la digestion, sans compter qu'il est plus aisé d'unir à cette nourriture qu'à toute autre, le suc des Plantes qu'on juge à propos d'y joindre pour temperer son action dans le Sang.

Je ne répéterai point ici le rapport qu'ont entre eux les extraits des autres Viandes, parce que je joins à ce Mémoire une Table qui contient par colonnes les produits détaillés de toutes mes opérations.

TABLE









WIDENER LIBRARY



HX ISPW 0

